THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre SOUFFRIN

1re THÈSE : Hydrodynamique d'une atmosphère perturbée par une zone convective turbulente sous-jacente.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté :

Le spectre des Naines Blanches.

Soutenues le 15 Avril 1966 devant la Commission d'examen :

MM. SCHATZMAN E. *Président.*

GERMAIN P.
MICHARD R. } *Examinateurs.*

ÉDITIONS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, Quai Anatole France
PARIS 7e

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences

de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Pierre SOUFFRIN

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN

1re THÈSE : Hydrodynamique d'une atmosphère perturbée par une zone convective turbulente sous-jacente.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté :

Le spectre des Naines Blanches.

Soutenues le 15 Avril 1966 devant la Commission d'examen :

MM. SCHATZMAN E. *Président.*

GERMAIN P.
MICHARD R. } *Examinateurs.*

ÉDITIONS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, Quai Anatole France
PARIS 7e

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546821_0054

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen. . . . . M. ZAMANSKY

PROFESSEURS

PRENANT. . . . T Anatomie et Histologie comparées.
GRASSÉ . . . . T Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST. . . . T Chimie organique.
WYART. . . . . T Minéralogie et Cristallographie.
TEISSIER. . . . T Zoologie.
AUGER. . . . . T Physique quantique et Relativité.
MONNIER. . . . T Physiologie générale.
PIVETEAU . . . T Paléontologie.
ROCARD . . . . T Physique (E. N. S.).
CARTAN . . . . T Mathématiques (E. N. S.).
LAFFITTE. . . . T Chimie générale.
N . . . . . T Géométrie supérieure.
COULOMB. . . . T Physique du globe.
Mlle COUSIN . . . T Biologie animale (S. P. C. N.).
CHRÉTIEN . . . . T Chimie minérale.
BOCQUET. . . . T Zoologie.
KADTLER. . . . T Physique (E. N. S.).
EPHRUSSI. . . . T Génétique.
GAUTHERET. . . T Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS R. . . . . T Recherches physiques.
THOMAS A. . . . T Biologie cellulaire.
MORAND . . . . T Physique enseignement.
SOLEILLET . . . T Physique (P. C. B.).
FORTIER . . . . T Mécanique expérimentale des fluides.
DRACH . . . . . T Zoologie.
QUENEY . . . . T Météorologie et Dynamique atmosphérique.
GALLIEN . . . . T Embryologie.
EICHORN. . . . T Botanique.
DE CUGNAC. . . T Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mlle CAUCHOIS . . T Chimie physique.
THELLIER . . . . T Physique du globe.
PONCIN. . . . . T Mécanique générale.
DUBREIL. . . . T Arithmétique et Théorie des nombres.
QUELET . . . . T Chimie organique.
CAGNIARD . . . T Géophysique appliquée.
CHAMPETIER . . . T Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER . . . T Micropaléontologie.
JUNG . . . . . T Géologie.
TRILLAT . . . . T Microscopie et Diffraction électronique.
WIEMANN . . . . T Chimie organique et structurale.
VASSY. . . . . T Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES . . . T Théories physiques.
AMIEL. . . . . T Chimie générale.
HOCART . . . . T Minéralogie et Cristallographie.
J.-P. MATHIEU . . T Physique optique.
COUTEAUX . . . T Cytologie.
CHOQUET. . . . T Théorie des fonctions et Topologie.
FELDMANN . . . T Biologie végétale marine.
JOST. . . . . T Physiologie comparée.
FORTET. . . . . T Calcul des probabilités et Physique mathématique.
SCHWARTZ . . . T Calcul différentiel et intégral.
CHOUARD. . . . T Physiologie végétale.
MALAVARD . . . T Aviation (Technique aéronautique).
BRELOT . . . . T Analyse supérieure.
NORMANT . . . T Synthèse organique.
BENARD . . . . T Chimie minérale.
DUGUE . . . . T Statistique
SOULAIRAC. . . T Psychophysiologie.
ULRICH . . . . T Physiologie végétale appliquée.
KIRRMANN. . . T Théories chimiques.
CHADEFAUD . . T Botanique.
Mlle LE BRETON . T Physiologie de la nutrition.
LELONG . . . . T Application de l'analyse à la géométrie.
DEVILLERS. . . T Anatomie et Histologie comparée.
EHRESMANN . . T Topologie algébrique.
FRANCON. . . . T Physique (S. P. C. N.).
GLANGEAUD . . T Géographie physique et Géologie dynamiques.
DODEMENT. . . T Mathématiques (M. G. P.).
PISOT. . . . . T Technique mathématique de la physique.
ROCH . . . . . T Géologie.
SCHATZMAN. . . T Astrophysique.
TERMIER. . . . T Géologie générale.
ZAMANSKY . . . T Mathématiques générales.
LENNUIER. . . . T Physique (M. G. P.).
ROUTHIER . . . T Géologie appliquée.
Mme TONNELAT. . T Physique théorique.
DIXMIER. . . . T Mathématiques (M. P. C.).
SOUCHAY. . . . T Chimie générale.
AIGRAIN . . . . T Électrotechnique.
BRUSSET. . . . T Chimie systématique.
M. LÉVY. . . . T Physique théorique des hautes énergies.

Mme CHAIX. . . T Chimie biologique.
Mme HUREL-PY. . T Biologie végétale (P. C. B.).
PANNETIER . . . T Chimie générale.
BRUN . . . . . T Mécanique des fluides. I.
Mme DUBREIL . . T Mathématiques (Agrégation).
Mme LELONG . . T Mathématiques, II (E. N. S.).
BELLAIR . . . . T Géologie (S. P. C. N.).
COTTE . . . . . T Physique électricité.
DUBOIS J. E. . . T Chimie organique.
LAMOTTE. . . . T Zoologie (E. N. S.).
OLMER . . . . . T Énergétique générale.
GAUTHIER . . . T Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ . . T Chimie physique.
BROSSEL . . . . T Physique atomique.
BUSER. . . . . T Physiologie comparée.
CAMUS. . . . . T Physiologie végétale.
CURIEN . . . . T Minéralographie et Cristallographie.
Mme CHARNAUX-COTTON T Évolution des êtres organisés.
POSSOMPES. . . T Zoologie.
PULLMANN . . . T Chimie quantique.
TEILLAC . . . . T Physique nucléaire et Radioactivité.
VILLE . . . . . T Économétrie.
WILLEMART. . . T Chimie (P. C. B.).
FREYMANN. . . T Recherches physiques.
ROLLET . . . . T Chimie minérale.
Mlle JOSIEN. . . T Chimie (S. P. C. N.).
CHEVALLEY. . . T Géométrie algébrique et Théorie des groupes.
GERMAIN. . . . T Mécanique théorique des fluides.
LUCAS (G). . . T Géologie.
ALLARD . . . . T Chimie physique.
BERTHELOT. . . T Physique des particules fondamentales
BRICARD . . . . T Météorologie
Mme ALBE-FESSARD. . . . . T Psycho-physiologie.
M. JULIA. . . . T Études des molécules naturelles.
MAGAT. . . . . T Physico-chimie des rayonnements.
Mlle QUINTIN. . T Électrochimie.
MONOD. . . . . T Chimie du métabolisme.
DE POSSEL. . . T Analyse numérique.
CHARLOT. . . . T Chimie analytique.
CHATELET (M) . . T Chimie (P. C. B.).
MATTLER. . . . T Physique (S. P. C. N.).
BOUISSIÈRES . . T Radiochimie.
Mme COUTURE. . T Thermodynamique et Mécanique physique.
FRANC. . . . . T Biologie animale (P. C. B.).
SCHNELL. . . . T Botanique tropicale.
STOLKOWSKI . . T Physiologie végétale.
ACHER. . . . . T Chimie biologique.
BAUDOIN . . . . T Biologie animale (P. C. B.).
BEAUMONT . . . Biologie animale (S. P. C. N.).
BLAMONT. . . . Géophysique ionosphère.
BOUREAU. . . . T Botanique.
CURIE D. . . . . Physique (M. G. P.).
DURAND-DELGA. . T Géologie.
HELLER . . . . T Physiologie végétale.
TORTRAT. . . . T Calcul des probabilités.
CAILLEUX. . . . T Géologie (S. P. C. N.).
MAGNAN . . . . . Physique électricité.
DAUDEL . . . . T Mécanique ondulatoire.
Mlle FOURCROY . . Biologie végétale (S. P. C. N.).
Mme CHOQUET-BRUHAT . . . . Mécanique analytique et mécanique céleste.
Mlle VEIL. . . . T Physiologie générale.
LWOFF. . . . . T Microbiologie.
SIESTRUNCK. . . T Mécanique physique et expérimentale.
CABANNES . . . T Mécanique générale.
CAIRE . . . . . Géographie physique et géologie dynamique.
COMOLET. . . . Mécanique des fluides.
DELLOUE. . . . T Physique de l'exosphère
HOUILLON . . . . Biologie animale P. C. B.
OLIVIER . . . . Antropologie.
SAMUEL . . . . T Mathématiques (E. N. S. jeunes filles).
THIRY . . . . . T Mécanique céleste.
ABELÈS . . . . . Physique (S. P. C. N.).
AMAT. . . . . T Thermodynamique
AUBOIN . . . . T Géologie.
Mme BENOIT-GUEUTAL. . . T Physique nucléaire et radioactivité.
BOUGIS. . . . . Biologie marine, Villefranche-sur-mer.
BRUHAT . . . . T Mathématiques (M. P. C.).
DEHEUVELS . . . T Mathématiques (propédeutique).

FURON	T	Géologie (S. P. C. N.).
Mme GANS	T	Génétique.
GENEVES		Biologie végétale (P. C. B.).
GUILBERT		Physique (C. U. S., Orléans).
HUPE	T	Pétrographie.
HOLLANDE	T	Biologie générale.
LIONS	T	Analyse numérique.
MAITTE	T	Chimie organique.
NICOLAS		Géologie appliquée.
PANIGEL		Biologie générale.
RAVIER	T	Pétrographie.
ROSEAU	T	Mécanique théorique des fluides.
ROUBINE	T	Électronique.
SILBER	T	Chimie (P. C. B.).
UEBERSFELD	T	Electronique.
YVON	T	Théories physiques.
HERVÉ	T	Mathématiques.
Mme PECKER-WIMEL	T	Astrophysique.
BALKANSKY		Physique (M. P. C.).
LE CORRE	T	Électricité.
NATAF	T	Physique nucléaire et radioactivité.
ECHALIER		Biologie animale (P. C. B.).
BARRAUD		Physiologie cellulaire.
DARS		Géologie structurale et géologie appliquée.
CAMEFORT	T	Botanique (agrégation).
VICHNIEWSKY	T	Mécanique industrielle.
BLAQUIÈRE		Électronique.
ARNOUS	T	Physique théorique.
TATIBOUET		Chimie (C. S. U., Orléans).
MALLIAVIN	T	Mathématiques (propédeutique).
GAUDEMAR		Chimie propédeutique.
BROUSSE	T	Mécanique théorique.
ROSCH	T	Astronomie.
GUY	T	Physique expérimentale.
LAZARD		Mathématiques (M. P. C.).
MOREL Pierre		Physique (M. P. C.).
ARSAC		Programmation.
LEFEBVRE		Chimie (M. P. C.).
CHAPEVILLE		Biochimie.
BENOIT		Physique (C. P. E. M.).

RIO		Chimie (C. P. E. M.).
JAUZEIN		Géologie (E. N. S.).
PRÉVOST Georges		Biologie (C. P. E. M.).
FAVARD P.		Biologie (C. P. E. M.).
Mlle FICINI		Chimie (C. P. E. M.).
LEQUEUX		Astronomie.
COHEN-TANNOUDJI		Physique atomique
TAVERNIER		Physique (C. P. E. M.).
DURAND M.		Biologie animale (S. P. C. N.).
PASCAUD		Physiologie.
Mme PETIT		Biologie animale (C. P. E. N.).
CAGNIAC		Physique (agrégation).
FALK-VAIRANT		Physique nucléaire.
RIGAUDY		Chimie (S. P. C. N.).
SIGWALT		Chimie (S. P. C. N.).
FOURNET		Électricité générale.
COLLONGUES		Chimie (C. P. E. N.).
DUBERT		Biochimie.
MOREL F.		Physiologie comparée.
TALBOT		Génétique chimique.
Mme NOUGAREDE		Botanique.
FRANÇOIS		Zoologie.
IVANOFF		Océanographie physique.
CADIOT		Chimie organique.
BARUCH		Physique (propédeutique).
NOZIÈRES		Physique générale.
BOK		Physique (propédeutique).
SLOMINSKI		Génétique.
KRASNER	T	Mathématiques.
BENZECRI	T	Statistiques.
VINH MAU		Physique (M. G. P.).
DUQUESNES		Physique (C. P. E. M.).
SCHUTZENBERGER		Programmation.
TREMILLON		Chimie (M. P. C.).
FAYARD		Chimie (M. P. C.)
BUVET		Chimie (C. P. E. M.).
AUTHIER		Physique (M. P. C.).
PICINBONO	T	Physique (C. P. E. M.)
BONNEFILLE		Électrotechnique.
Mme PUISEUX-DAO		Biologie végétale.

Le Secrétaire Général R. POULLAIN.

HYDRODYNAMIQUE D'UNE ATMOSPHERE PERTURBEE PAR UNE ZONE CONVECTIVE TURBULENTE SOUS-JACENTE

SOUFFRIN Pierre

Institut d'Astrophysique, Paris

RÉSUMÉ. — *On présente une formulation du problème de l'étude statistique du mouvement de l'atmosphère tenant essentiellement compte de la géométrie tri-dimensionnelle de la convection turbulente sous-jacente* (I). *On étudie de cette façon la variation de la structure spatio-temporelle du mouvement avec la distance à la zone convective dans un fluide homogène ; on démontre d'une façon très générale le caractère oscillatoire du mouvement lointain, marqué par un changement de signe des fonctions d'autocorrélation temporelle* (II). *On généralise le diagramme diagnostique du fluide compressible homogène* (III) *et de l'atmosphère isotherme* (IV) *en introduisant explicitement une dissipation par rayonnement. On montre que les ondes de gravité ne peuvent exister dans une atmosphère isotherme que si le temps de relaxation radiative est assez élevé. Dans le cas de l'atmosphère solaire, cette condition exclut les ondes de gravité dans la photosphère. Un modèle hydrodynamique* (V) *de photosphère basé sur cette propriété rend compte de façon satisfaisante de la variation dans cette région du spectre de puissance et des dimensions de la granulation solaire.*

SUMMARY. — *The problem of the statistical study of the movement of an atmosphere is formulated so as to take account of the three-dimensioned geometry of the sub-jacent turbulent convection (I). Thus we study the variation of the space time structure of the movement with distance from the convective zone in an homogeneous fluid ; the oscillatory character of the distant motion marked by a change in sign of the time autocorrelation functions, is shown in a general way (II). The diagnostic diagram of the homogeneous compressible fluid (III) and of the isothermal atmosphere (IV) is generalized by the explicit introduction of radiative dissipation. We show that gravity waves cannot exist in an isothermal atmosphere unless the radiative time is sufficiently high. For the solar atmosphere case, this condition excludes gravity waves in the photosphere. A hydrodynamic model (V) of the photosphere, based on this property, gives satisfactory account of the power spectrum variation in this region and of the dimensions of solar granulation.*

Резюме. — Представлена формулировка проблемы статистического изучения движения атмосферы учитывая, главным образом, трехмерную геометрию нижележащей тубулентной конвекции (I). Таким способом изучено изменение пространственно — временной структуры движения с расстоянием до конвективной зоны в однородном жидком теле ; доказан, самым общим образом, колебательный характер отдаленного движения, выраженный изменением знака функций временной автокорреляции (II). Обобщена диагностическая диаграмма однородного сжимаемого жидкого тела (III) и изотермической атмосферы (IV), вводя в явном виде рассеивание излучением.

Показано, что волны слиы тяжести могут существовать в изотермической атмосфере лишь только, если время излучательной релаксации довольно повыщенное. В случае солнечной атмосферы это условие исключает волны силы тяжетси в фотосфере. Гидродинамическая модель (V) фотосферы, основанная на этом свойстве, удовлетворительным образом обьясняет изменение в этой области мощностного спектра и размеров солнечной грануляции.

I. Formulation du problème.

Introduction

L'étude hydrodynamique des couches superficielles du Soleil connaît depuis quelques années un regain notable d'intérêt. Ce renouvellement est essentiellement dû aux progrès des techniques observationnelles qui ont permis de mettre en évidence des caractéristiques remarquables du champ de vitesses Doppler et des fluctuations de brillance dans la haute photosphère et dans la chromosphère. La richesse des informations ainsi recueillies a tout

naturellement suscité de nombreux travaux théoriques tendant à interpréter et à expliquer ces informations.

L'hétérogénéité du champ de brillance de la photosphère loin des zones actives est connue depuis longtemps et une très belle photographie obtenue par JANSEN [14] met en évidence le phénomène alors désigné sous le nom de « grain de riz ». La nature de ce te « granulation » reste incomprise jusqu'à ce que UNSÖLD [44] reconnaisse le rôle déstabilisant de l'ionisation de l'hydrogène au niveau photosphérique. Un rapprochement tout à fait qualitatif des cellules observées par THOMSON [41] et BÉNARD [4] et de la granulation conduit à considérer celle-ci comme la région supérieure de la zone convective solaire. Cependant cette explication, satisfaisante du point de vue qualitatif, reste impuissante à interpréter quantitativement l'aspect de ce qu'on appelle encore les granules. Cela tient évidemment surtout à la totale carence de la théorie hydrodynamique de la convection thermique où aucun progrès décisif n'a été fait depuis RAYLEIGH [27].

SCHATZMAN [30], se référant au processus analysé par LIGHTHILL [19] de génération du son par turbulence, considère le granule comme la perturbation de brillance accompagnant le passage d'une onde acoustique se formant dans une région plus profonde. La notion de « grain de riz » s'efface pour l'observateur avec l'amélioration de la définition des photographies. De même s'efface pour le théoricien la notion de globule ou de granule, liée à la théorie de la longueur de mélange peu valable au niveau de la photosphère (SPIEGEL [36]). L'analyse photométrique de la photosphère conduit également SKUMANICK [32] et RÖSCH [29] à renoncer aux « granules ». L'impossibilité d'accéder aux champs de vitesse associés limite les informations sur la nature précise des fluctuations de brillance à ce niveau. RICHARDSON et SCHWARZSCHILD [28], en analysant le champ Doppler dans des raies photosphériques inauguraient une série d'observations (mentionnées au début) qui doit encore apporter beaucoup sur l'état hydrodynamique des couches superficielles du Soleil.

En fait l'observation, quelle que soit la méthode, conduit non pas à des vitesses réelles, mais à des vitesses Doppler : le passage des écarts Doppler dans différentes raies au champ de vitesse dans l'atmosphère pose un problème de transfert ardu et peu étudié jusqu'aujourd'hui (MEIN [22]). A défaut d'un modèle cinématique complet, les observations récentes de MICHARD, EVANS, EDMONDS, SERVAJEAN [10], [11] et de LEIGHTON *et al.* [18] permettent de dégager certaines propriétés intéressantes et bien établies d'un tel modèle. Dans la distinction actuellement retenue entre granulation et super granulation, deux aspects qualitatifs de la granulation attirent particulièrement l'attention :

a) une augmentation avec l'altitude de la largeur de l'autocorrélation horizontale du champ de vitesses. LEIGHTON [18] donne 1700 km pour la raie Fe 6102 et 3500 km dans la raie plus haute Na 5896.

b) un caract're oscillatoire dans le temps avec une pseudo période de l'ordre de 295 s.

C'est en particulier cette dernière propriété qui a fait l'objet d'effort d'interprétation et qui a guidé l'élaboration des modèles théoriques.

Les modèles hydrodynamiques d'atmosphères.

Un certain nombre de modèles hydrodynamiques d'atmosphères ont été étudiés. Ces modèles d'atmosphères sont hydrodynamiques en ce sens que la structure est toujours supposée extrêmement simple de fa on à ce que l'analyse puisse porter essentiellement sur les mouvements.

L'étude de tels modèles s'imposa d'abord aux géophysiciens en relation avec les mouvements de l'atmosphère terrestre et des océans. Il est remarquable cependant que la très longue contribution des géophysiciens soit d'une utilité très relative pour l'astrophysicien. L'explication en est donné par I. TOLSTOÏ [42] dans un important travail : les géophysiciens ont porté leur attention sur de nombreux phénomènes naturels comme les vents, les marées, les courants, la turbulence, ce qui les a conduits à négliger l'étude du problème plus simple mais non moins fondamental des petits mouvements dans un fluide au repos. Les traités LAMB [17] BJERKNÈS, BJERKNÈS, BERGERON, SOLBERG [5] et de ECKART [8] constituent des exceptions notables.

Si on élimine les problèmes de stabilité de masses gazeuses qui relèvent de la structure interne pour se limiter aux problèmes d'atmosphères, ce sont les observations photosphériques qui ont amené les astrophysiciens à développer une contribution originale.

Très généralement on considère une atmosphère de structure stable vis-à-vis de petites perturbations, et on en étudie, en linéarisant les équations du mouvement, soit des modes de vibrations propres, soit la réponse à une excitation spécifiée. Paradoxalement, ces deux points de vues ne se réduisent pas l'un à l'autre. La raison en est la suivante : le type d'excitation choisi dans les études d'atmosphères excitées est généralement incompatible

avec les conditions aux limites choisies dans les études d'oscillations libres. Des exemples typiques des deux méthodes sont d'une part l'étude des oscillations d'une atmosphère dont la base oscille comme un piston (Lamb [16]), d'autre part l'étude des oscillations d'une atmosphère au-dessus d'une paroi rigide fixe (Lamb [17]). On rencontre donc deux types d'études dont la synthèse ne peut être faite par simple juxtaposition. Physiquement l'étude des oscillations libres donne les mouvements de l'atmosphère en fonction de l'état initial, la source du mouvement étant traitée comme une force extérieure négligeable dans l'évolution ultérieure. C'est la transposition de la méthode des modes normaux à l'étude des configurations stables : il est clair que si cette méthode est correcte pour obtenir des critères de stabilité, elle ne peut donner le mouvement engendré dans le cas de la stabilité par une source exclue de son formalisme. Mathématiquement, les oscillations libres forment un ensemble d'états de mouvement complet en l'absence de force, mais trop restreint pour décrire les oscillations forcées par une excitation quelconque. Les oscillations libres n'apparaissent essentiellement que lorsque l'excitation a cessé. La méthode des modes normaux s'applique bien, par exemple, à l'oscillation de l'atmosphère terrestre après l'explosion du Krakatoa (Taylor [40]). Mais en raison du caractère incomplet de l'ensemble des oscillations libres, elles ne se comportent pas comme des résonances en présence d'excitations. Là est sans doute la raison de l'insuccès de l'application de la théorie des oscillations libres à l'atmosphère terrestre (Tolstoï [44].)

Origine physique de l'oscillation photosphérique.

L'idée de résonance de l'atmosphère solaire semble s'être imposée aux observateurs (Evans, Michard, Servajean [11]) pour interpréter la pseudo-période observée et a guidé certains travaux théoriques récents (Bahng et Schwarzschild [1], Schatzman [31], Uchida [43]).

Les arguments que nous venons de développer conduisent à chercher une autre explication des observations, en introduisant explicitement dans le modèle hydrodynamique une représentation de la source (Souffrin [33]). C'est une telle explication que nous allons exposer dans la suite.

Du point de vue hydrodynamique, l'atmosphère solaire est située au-dessus d'une zone thermiquement instable. C'est cette zone instable qui force le mouvement dans l'atmosphère, sous forme de deux composantes physiquement distinctes. L'une des composantes existe indépendemment de la compressibilité de l'atmosphère, et est due à la pénétration des mouvements convectifs dans la zone stable. C'est la convection pénétrative. L'étude de cet aspect essentiel de la convection n'a été qu'effleurée (Veronis [45]) ce qui constitue une lacune importante. L'autre composante est liée à la compressibilité du fluide et au caractère non permanent (ou turbulent) du mouvement dans la zone convective. Lighthill [19] et son école ont montré qu'un fluide turbulent se comporte comme une source d'énergie acoustique de puissance $P \propto \rho_0 U^8 c^{-5} l^{-1}$ où ρ_0 est la densité, U la vitesse turbulente, c la vitesse du son, et l une dimension caractéristique. La méthode de Lighthill consiste essentiellement à considérer les termes non-linéaires des équations du mouvement comme des termes connus. On traite alors les équations en les linéarisant dans les régions de l'espace où les vitesses sont faibles, et comme des équations linéaires avec des seconds membres connus (ou termes de sources) dans les régions où les vitesses sont de l'ordre de (ou supérieures à) la vitesse du son.

La théorie de la zone convective solaire conduit à des vitesses convectives faibles sauf dans la région superficielle peu profonde où le gradient de température est fortement sur-adiabatique. La région efficace dans le processus de Lighthill est encore plus étroite. De Jager et Kuperus [13] admettent que l'énergie acoustique est rayonnée par une couche de 60 km de profondeur située vers 300 km au-dessous de la surface.

Modèle d'atmosphère excitée par une source acoustique turbulente.

Nous schématiserons la situation en admettant que l'atmosphère solaire est excitée par une source située entièrement au-dessous de la surface, donc en dessous de la région où on peut observer des vitesses Doppler. Nous ne considérons pas la possibilité de génération d'oscillations *in situ* par la convection pénétrative suggérée par Moore et Spiegel [24]. Nous admettrons que cette source sous-jacente est statistiquement stationnaire et homogène sur tout plan horizontal, ce qui semble adapté à la très forte turbulence (nombre de Rayleigh de l'ordre de 10^{11}) de la partie supérieure de la zone convective solaire. Nous allons représenter une telle excitation non par des termes de sources dans les équations du mouvement, ce qui conduit à une analyse difficile (Kato [15]), mais par des conditions aux limites non homogènes sur un plan

horizontal situé *au-dessus* de la source. Ceci revient à se donner le mouvement forcé par la source sur un plan horizontal, et à étudier le mouvement au-dessus de ce plan en l'absence de source, c'est-à-dire à l'aide d'équations linéarisées. Ces conditions aux limites non homogènes constituent une différence essentielle par rapport aux modèles étudiés par Eckart [8] ou Bahng et Schwartzschild [1].

Dans la suite nous désignerons sous le terme de *source* le mouvement à l'altitude z_0 où nous le supposons connu.

Nous avons noté plus haut que le mouvement dans l'atmosphère solaire est *statistiquement* stationnaire, isotrope et homogène sur tout plan horizontal. Pour tenir compte de ce caractère fondamental, nous devons faire porter notre analyse sur les éléments qui permettent de définir les caractéristiques statistiques du mouvement, c'est-à-dire, seulement sur des valeurs moyennes. Plus précisément, considérons une grandeur physique quelconque, par exemple la température θ sur un plan horizontal. A la fonction $\theta\ (x, y, t)$ on peut associer une fonction aléatoire triviale : si on fait une partition du plan horizontal (on néglige ici la courbure de la surface solaire) en éléments S_i de surface s et si on décompose le temps en intervales T_j de durée T, on peut considérer les $\{ S_i, T_j \}$ comme un ensemble au sens statistique du mot, et $\theta\ (x, y, z)$ définit alors une fonction aléatoire $\bar{\theta}$ sur $\{ S, T \}$. Les observations réalisent en fait de telles partitions, et conduisent à la connaissance de $\bar{\theta}$. La comparaison entre la théorie et l'observation doit donc porter sur $\bar{\theta}$. Mais, du fait que les $\{ S_i, T_j \}$ sont une partition de (x, y, t), les valeurs moyennes de $\theta\ (x, y, t)$ et de $\bar{\theta}$ sont identiques :

$$\lim_{\substack{a\to\infty \\ \sigma\to\infty}} \frac{1}{\sigma a} \int_\sigma dx \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} dt\, f(\theta) = < \int_s dx \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \frac{f(\bar{\theta})}{ST} >,$$

où $<\quad>$ désigne la moyenne d'ensemble, et f une fonction quelconque. Nous devons donc chercher à déterminer $\theta\ (x, y, t)$ par sa valeur moyenne et les moments de ses fluctuations dans l'espace et dans le temps. Il n'y a plus lieu de distinguer alors entre $\bar{\theta}$ et θ, et dans la suite nous considèrerons $\theta\ (x, y, t)$ (et de même pour les autres grandeurs physiques liées au mouvement) comme une fonction aléatoire. Le problème consiste pour nous à déterminer d'une part les relations existant entre les fonctions aléatoires associées aux différentes grandeurs physiques, et d'autre part la façon dont ces fonctions aléatoires dépendent de l'altitude z du plan sur lequel elles sont définies.

En résumé, les principales caractéristiques de notre étude consistent à tenir compte simultanément :

— de l'excitation de l'atmosphère solaire par une source sous-jacente qui n'intervient pas explicitement dans les travaux de Bahng et Schwarzschild [1], Schatzman [31] et Uchida [42] ;

— de l'extension horizontale de la source (contrairement à Moore et Spiegel [24] qui étudient une source ponctuelle) ;

— du caractère aléatoire dû à la turbulence dans la zone convective. C'est ce dernier point qui distingue notre étude de celle, très proche d'esprit, de Whitney [47].

Fonction d'autocorrélation et fonction spectrale d'une fonction aléatoire.

Considérons le champ des fluctuations $\theta\ (x, y, t)$ de la température (par exemple) autour de sa valeur moyenne à l'altitude z. La fonction la plus simple et la plus importante par laquelle on peut décrire θ est la fonction d'autocorrélation spatio-temporelle :

$$(1)\quad \Phi_{\theta z}(\boldsymbol{r}, \tau) = \lim_{\substack{\sigma\to\infty \\ a\to\infty}} \frac{1}{2\sigma a} \int_\sigma \boldsymbol{dx} \int_{-a}^{+a} dt\, \theta(\boldsymbol{x}, t)\, \theta(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, t + \tau).$$

Si $\theta\ (\boldsymbol{x}, t)$ est une fonction quasi-périodique. c'est-à-dire si,

$$\theta(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k\in\{K\}} \sum_{\omega\in\{\Omega\}} A_{k,\omega} \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} + \omega t),$$

où $\{ K \}$ et $\{ \Omega \}$ sont des ensembles dénombrables, on a la relation simple :

$$(2)\quad \Phi_{\theta z}(\boldsymbol{r}, \tau) = \sum_{k\in\{K\}} \sum_{\omega\in\{\Omega\}} |A_{k,\omega}|^2 \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} + \omega\tau)$$

donc la fonction d'autocorrélation est également quasi-périodique. Les fluctuations associées au mouvement atmosphérique solaire ne sont donc pas à spectre dénombrable : les fonctions d'autocorrélation tendent vers zéro à l'infini en r et τ, ce qui est d'ailleurs une propriété caractéristique de la turbulence. On obtient alors une représentation du type (2) en considérant le champ $\theta^+(x, y, t)$ périodique en x, y et t coïncidant avec $\theta(x, y, t)$ sur la

surface σ et l'intervalle $\{-a, +a\}$. En prenant pour σ un carré de côté L on peut écrire :

$$(3)\quad \Phi_{\theta z}(\boldsymbol{r}, \tau) = \lim_{\substack{L\to\infty \\ a\to\infty}} \frac{1}{2aL^2} \int_\sigma d\boldsymbol{x} \int_{-a}^{+a} dt\, \theta^+(\boldsymbol{x}, t)\, \theta^+(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r}, t+\tau),$$

θ^+ est périodique et se développe en série de Fourier :

$$(4)\quad \theta^+(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{m,n,l} A_{k,\omega} \exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + \omega t),$$

où

$$\boldsymbol{k} = \left(\frac{2\pi m}{L}, \frac{2\pi n}{L}\right), \qquad \omega = \frac{\pi l}{a},$$

en portant (4) dans (3), on obtient :

$$(5)\quad \Phi_{\theta z}(\boldsymbol{r}, \tau) = \lim_{\substack{l\to\infty \\ L\to\infty}} \sum_k \sum_{k'} \sum_\omega \sum_{\omega'} A_{k,\omega}\, A^*_{k',\omega'}\, \delta_{k,k'}\, \delta_{\omega,\omega'} \exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \omega\tau).$$

Le passage à la limite se fait en utilisant les relations (voir par exemple Balescu [2]) :

$$(6)\quad \begin{cases} \lim_{L\to\infty} \dfrac{2\pi}{L^2} \sum_k \to \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\boldsymbol{k} \\ \lim_{L\to\infty} 2\pi L^2\, \delta_{k,k'} \to \delta(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'). \end{cases}$$

(5) devient

$$(7)\quad \Phi_{\theta z}(\boldsymbol{r}, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y\, F_{\theta z}(\boldsymbol{k}, \omega) \exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \omega\tau),$$

où la *densité spectrale* $F_{\theta z}(k, \omega)$ est définie par

$$(8)\quad F_{\theta z}(\boldsymbol{k}, \omega) = \lim_{\substack{a\to\infty \\ L\to\infty}} 2aL^2\, |A_{k,\omega}|^2 . \text{constante}.$$

Le passage de (1) à (4) et (8) que nous venons de donner est plus suggestif que rigoureux. Pour un développement plus élaboré, on se reportera utilement à l'ouvrage fondamental de Wiener [48]. Blackman et Tuckey [6] donnent de (8) une « démonstration » différente de la nôtre, mais pas plus rigoureuse.

La comparaison de (2) et (7) conduit à une règle pratique pour passer du spectre dénombrable au spectre continu. Il suffit de remplacer formellement l'opérateur :

$$\sum_{k,\omega} |A_{k,\omega}|^2,$$

par l'opérateur

$$\int d\boldsymbol{k}\, d\omega\, F_{\theta z}(\boldsymbol{k}, \omega),$$

$F_{\theta z}(\boldsymbol{k}, \omega)$ étant défini par (8).

Cette règle simple, avec les relations (7) et (8), nous permettra dans la suite d'obtenir des relations entre les fonctions d'autocorrélation (ou les densités spectrales) des différentes grandeurs physiques à partir de l'étude des cas particuliers simples où les fluctuations sont périodiques en x, y et t.

Détermination statistique [1] *de la réponse d'une atmosphère à l'excitation par une source aléatoire stationnaire.*

Nous pouvons maintenant mettre en évidence, d'une façon tout à fait générale, une relation essentielle entre le mouvement aléatoire de la source et le mouvement dans l'atmosphère.

Considérons le champ de perturbation d'une grandeur physique quelconque $X(x, y, z, t)$. Par élimination des autres grandeurs, on peut obtenir à partir des équations *linéarisées* du mouvement une équation pour $X(x, y, z, t)$ du type

$$(9)\quad \mathfrak{L}X = 0,$$

où $\mathfrak{L}$ est un opérateur différentiel linéaire dépendant de la structure de l'atmosphère. L'hypothèse que l'atmosphère est stratifiée horizontalement entraîne que les coefficients de $\mathfrak{L}$ ne dépendent que de z.

Conformément au point de vue développé dans les paragraphes précédents, nous représentons la source en nous donnant la fonction d'autocorrélation $\Phi_0(\boldsymbol{r}, \tau)$ de $X(x, y, z, t)$ sur le plan $z = z_0$ de la source, soit,

$$(10)\quad \Phi_0(\boldsymbol{r}, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d\boldsymbol{k}\, F_0(k, \omega) \exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} + \omega\tau),$$

où $F_0(\boldsymbol{k}, \omega)$ est la fonction spectrale de la source.

$X(x, y, z, t)$ vérifiant l'équation (9) et la condition (10), il s'agit de trouver *la fonction d'autocorrélation* $\Phi_z(\boldsymbol{r}, \tau)$ de $X(x, y, z, t)$ à *l'altitude* z.

Cherchons d'abord la solution de (9) avec la condition aux limites périodique.

$$(11)\quad X(x, y, z_0, t) = A \exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} + \omega t),$$

où $\boldsymbol{x} = (x, y)$.

[1] Pour une analyse axiomatique d'un problème analogue, voir : Kampé de Fériet, 1953, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, hors-série, « l'intégration de l'équation de la chaleur pour des données initiales aléatoires ».

Les coefficients de $\mathfrak{L}$ ne dépendant pas de x, y ou t, on peut chercher la solution sous la forme :

$$X(x, y, z, t) = Af(\boldsymbol{k}, \omega, z) \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} + \omega t). \quad (12)$$

En portant (12) dans (9) on obtient une équation de la forme :

$$Lf(\boldsymbol{k}, \omega, z) = 0, \quad (13)$$

où L est un opérateur différentiel linéaire dont les coefficients dépendent de $\boldsymbol{k}$, ω et z. La condition (11) devient :

$$f(\boldsymbol{k}, \omega, z_0) = 1. \quad (14)$$

Si $f(\boldsymbol{k}, \omega, z_0)$ est la solution du système (13), (14), la solution du système (9), (11) est :

$$X(x, y, z, t) = Af(\boldsymbol{k}, \omega, z) \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} + \omega t), \quad (15)$$

et à la condition en $z = z_0$:

$$X(x, y, z_0, t) = \sum_{k,\omega} A_{k,\omega} \exp i(\boldsymbol{k}\,\boldsymbol{x} + \omega t), \quad (16)$$

correspond par superposition linéaire la solution :

$$X(x, y, z, t) = \sum_{k,\omega} A_{k,\omega} f(\boldsymbol{k}, \omega, z) \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} + \omega t). \quad (17)$$

En passant à la limite du spectre continu, on obtient d'après (7) et (8) la fonction d'autocorrélation en z de la solution :

$$\Phi_z(\boldsymbol{r}, \tau) = \int d\omega\, d\boldsymbol{k}\, F_z(\boldsymbol{k}, \omega) \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} + \omega\tau), \quad (18)$$

où :

$$F_z(\boldsymbol{k}, \omega) = \lim_{\substack{a\to\infty \\ L\to\infty}} 2aL^2 |A(\boldsymbol{k}, \omega)|^2 |f(\boldsymbol{k}, \omega, z)|^2, \quad (19)$$

soit en utilisant :

$$f(\boldsymbol{k}, \omega, z_0) = 1 \text{ quelque soit } (\boldsymbol{k}, \omega),$$

$$F_z(\boldsymbol{k}, \omega) = |f(\boldsymbol{k}, \omega, z)|^2 F_0(\boldsymbol{k}, \omega). \quad (20)$$

Les relations (10), (18) et (20), qui permettent de passer de $\Phi_0(\boldsymbol{r}, \tau)$ à $\Phi_z(\boldsymbol{r}, \tau)$ constituent la solution formelle du problème que nous nous sommes posés. (20) donne la fonction spectrale du mouvement dans le plan d'altitude z en fonction de la source, représentée par $F_0(\boldsymbol{k}, \omega)$ et de la structure de l'atmosphère, représentée par $f(\boldsymbol{k}, \omega, z)$.

Le fait qu'on se limite à la détermination *statistique* du mouvement constitue une simplification du problème général de la recherche des solutions des équations du mouvement : $f(\boldsymbol{k}, \omega, z)$ n'intervient dans (20) que par son module. Il suffit donc de déterminer $f(\boldsymbol{k}, \omega, z)$ à la phase près.

Analogie avec la formation des images optiques.

La relation (20) montre que, du point de vue des fonctions d'autocorrélation, l'atmosphère se comporte comme un filtre linéaire. La relation entre les fonctions d'autocorrélation en z_0 et z est formellement identique à la relation entre l'éclairement d'un objet et l'éclairement de son image formée par un instrument d'optique de facteur de transmission $|f|^2$ (Maréchal et Françon [20]). Cette analogie montre le rôle fondamental de l'*extension* et de la *structure spatio-temporelle* de la source acoustique qui est à l'origine des mouvements dans l'atmosphère solaire.

Dans l'esprit de cette analogie, nous désignerons dans la suite, le mouvement à l'altitude z sous le nom de *mouvement image* ou plus simplement sous le nom d'image en z de la source, et les fonctions $|f(\boldsymbol{k}, \omega, z)|^2$ sous le nom de *facteurs de transmission.*

Diagramme diagnostique d'un fluide.

D'une façon très générale, on peut diviser l'ensemble des modes $(\boldsymbol{k}, \omega)$ en un nombre limité de catégories déterminées par les propriétés physiques des modes. Une telle division conduit à une partition de l'espace $(\boldsymbol{k}, \omega)$. Dans les cas considérés dans la suite, l'isotropie des conditions physiques sur les plans parallèles à la source conduit à se limiter à l'espace à deux dimensions (k, ω). Suivant Eckart [8] nous appellerons *diagramme diagnostique* du fluide la partition du plan (k, ω) entre les différentes catégories de modes de mouvement. La grande utilité de ce concept dans le problème que nous traitons tient à ce que les propriétés physiques caractéristiques des différentes catégories se traduisent par des différences *qualitatives* de la dépendance en z du facteur de transmission $|f(k, \omega, z|^2$. La connaissance de la source $F_0(k, \omega)$ et du diagramme diagnostique permet souvent de déterminer les propriétés qualitatives importantes de l'image.

Définition des caractéristiques statistiques du mouvement.

L'état du mouvement sur un plan horizontal est défini par trois champs scalaires, les perturbations θ, π, σ de la température, de la pression et de la densité, et par le champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ des vitesses. Nous nous limiterons aux premiers moments, c'est-à-dire aux fonctions d'autocorrélation.

Pour les champs *scalaires*, on désignera par

$\Phi_{\theta z}(\boldsymbol{r}, \tau)$, $\Phi_{\pi z}(\boldsymbol{r}, \tau)$ et $\Phi_{\sigma z}(\boldsymbol{r}, \tau)$ les fonctions d'autocorrélation sur le plan d'altitude z respectivement de la température, de la pression et de la densité. On aura par exemple :

$$\Phi_{\pi z}(\boldsymbol{r}, \tau) = < \pi(x, y, z, t) \; \pi(x + r_x, y + r_y, z, t + \tau) >, \tag{21}$$

et des relations semblables pour $\Phi_{\theta z}$ et $\Phi_{\sigma z}$.

Nous désignerons les densités spectrales correspondantes par

$$\mathrm{F}_{\pi z}(\boldsymbol{k}, \omega), \quad \mathrm{F}_{\theta z}(\boldsymbol{k}, \omega) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_{\sigma z}(\boldsymbol{k}, \omega).$$

Par définition on a :

$$\Phi_{\pi z}(\boldsymbol{r}, \tau) = \int \boldsymbol{dk}\, d\omega\, \mathrm{F}_{\pi z}(\boldsymbol{k}, \omega) \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} + \omega\tau). \tag{22}$$

et une relation semblable pour chaque grandeur physique.

Pour le champ de vitesse, nous décrirons son caractère *vectoriel* en introduisant trois fonctions d'autocorrélation :

a) la fonction d'autocorrélation des *vitesses verticales* se définit immédiatement :

$$\Phi_{\mathrm{V}z}(\boldsymbol{r}, \tau) = < \mathrm{V}_z(x, y, z, t) \; \mathrm{V}_z(x + r_x, y + r_y, z, t + \tau) >, \tag{23}$$

où V_z est la composante verticale de la vitesse.

De même, la densité spectrale de V_z est définie par :

$$\Phi_{\mathrm{V}z}(\boldsymbol{r}, \tau) = \int \boldsymbol{dk}\, d\omega\, \mathrm{F}_{\mathrm{V}z}(\boldsymbol{k}, \omega) \exp i(\omega\tau + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}). \tag{24}$$

La vitesse horizontale se décompose en deux composantes. Étant donné deux points $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}$ du plan horizontal, on appelle *vitesse longitudinale* en l'un de ces points la projection de la vitesse sur la droite qui les joint, et *vitesse transversale* la projection de la vitesse sur un axe perpendiculaire. On définira donc :

b) la fonction d'autocorrélation de la vitesse longitudinale :

$$\Phi_{\mathrm{L}z}(\boldsymbol{r}, \tau) = < \frac{\boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}_\perp(x, y\, z, t)\; \boldsymbol{r}.\boldsymbol{v}_\perp(x + r_x, y + r_y, z, t + \tau)}{r^2} >. \tag{25}$$

c) la fonction d'autocorrélation de la vitesse transversale :

$$\Phi_{\mathrm{T}z}(\boldsymbol{r}, \tau) = < \frac{(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}_\perp(x, y, z, t)).(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}_\perp(x + r_x, y + r_y, z, t + \tau))}{r^2} >, \tag{26}$$

où $\boldsymbol{v}_\perp$ est la vitesse horizontale.

En fait les fonctions d'autocorrélation doubles $\Phi_z(\boldsymbol{r}, \tau)$ sont difficiles à obtenir pour l'observation, dans le cas du soleil tout au moins. L'observation conduit plus généralement pour chaque grandeur, à trois fonctions qui définissent le champ des fluctuations de façon moins complète. Ce sont :

— la fonction d'autocorrélation spatiale $\Phi_z(\boldsymbol{r}, 0)$ qui caractérise la *structure spatiale* à chaque instant,

— La fonction d'autocorrélation temporelle $\Phi_z(0, \tau)$ qui caractérise *les fluctuations dans le temps* en un point,

— la valeur quadratique moyenne $\Phi_z(0, 0)$ qui est une mesure de l'*intensité* des fluctuations sur le plan d'altitude z.

Il est important de noter cependant que du point de vue théorique, c'est la fonction d'autocorrélation *double* qui s'analyse simplement en terme de filtrage de fréquences spatio-temporelles. Les variations en z de $\Phi_z(0, \tau)$ $\Phi_z(\boldsymbol{r}, 0)$ et $\Phi_z(0, 0)$ ne se calculent pas directement, mais s'obtiennent à partir de $\Phi_z(\boldsymbol{r}, \tau)$.

Nous associerons enfin à chaque altitude le scalaire complexe :

$$\mathcal{E} = < \mathrm{V}_z(x, y, z, t)\; \pi^*(x, y, z, t) >.$$

$\mathcal{E}$ est le flux complexe d'énergie « externe » introduite par Eckart [8]. La partie réelle de $\mathcal{E}$,

$$F = \mathcal{R}_{\mathrm{R}}\, \mathcal{E},$$

est le flux d'énergie externe, que nous assimilerons au flux d'énergie associé au mouvement. L'argument de $\mathcal{E}$, déphasage entre la vitesse verticale et la perturbation de pression est une grandeur importante associée au mouvement, dans la mesure où elle détermine le signe du flux vertical d'énergie.

Les équations du mouvement.

Dans le paragraphe précédent, nous avons utilisé les équations du mouvement linéarisées pour mettre en évidence le caractère très général de la relation (20) entre la source et son image. Pour étudier la réponse de modèles d'atmosphères, nous devons expliciter les équations du mouvement.

L'équation de continuité s'écrit dans tous les cas :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla.(\rho \boldsymbol{v}). \tag{27}$$

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}.\nabla)\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - g\nabla z + \nu\nabla^2 \boldsymbol{v},$$

ρ est la densité, p la pression, $\boldsymbol{v}$ la vitesse, g l'accélération de la pesanteur, ν la viscosité cinématique et l'axe oz est orienté vers le haut.

D'après Edmonds [9] les conditions physiques dans la photosphère solaire conduisent à la viscosité :

$$\nu_{\odot} \simeq 10^3 \text{ cm}^2 \, s^{-1}.$$

Supposons en $z = z_0$ un mouvement horizontal du type :

$$V_x = V_0(t), \quad V_y = 0, \quad V_z = 0,$$

et comparons $\nu \nabla^2 \boldsymbol{v}$ et $\dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$.

On a :

$$\left| \frac{\partial V_x}{\partial t} \right| \simeq \frac{V_0}{T},$$

et :

$$|\nabla^2 V_x| \simeq \frac{V_0}{L^2},$$

où L est une distance et T un temps caractéristiques du champ de vitesse. En admettant, pour le Soleil, $T \simeq 100$ s et $L \simeq 10^7$ cm, on obtient :

$$\left| \frac{\partial V}{\partial t} \right| \simeq 10^9 \, \nu_{\odot} \, |\nabla^2 V|.$$

On peut donc écrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous la forme :

$$(28) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla z,$$

avec une excellente approximation.

L'équation d'énergie.

L'équation d'énergie s'écrit pour un *gaz parfait* :

$$(29) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \right) p = \frac{p\gamma}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \right) \rho + \rho(\gamma - 1) \, Q,$$

où γ^{-1} est la compressibilité adiabatique et Q le gain de quantité de chaleur par seconde et par gramme. En vue de l'application à la photosphère et à la basse chromosphère solaire, nous allons nous limiter au cas où la principale contribution à Q est due au rayonnement, en négligeant la conduction moléculaire. De plus, nous traiterons toutes les perturbations comme *optiquement minces*, ce qui est justifié dans le cas solaire pour les niveaux de profondeur optique inférieure à l'unité.

Dans ces conditions la relaxation des fluctuations de température peut se décrire par l'équation de Newton :

$$Q \propto -\delta T.$$

δT étant l'écart entre la température locale et la température moyenne du fluide. Cette équation a été utilisée dès 1851 par Stokes [39] dans la discussion de la théorie de la propagation du son de Laplace. Nous écrirons l'équation de Newton sous la forme :

$$(30) \qquad Q = -\frac{\gamma c^2}{\tau_R} \frac{\delta T}{T},$$

où c est « la vitesse adiabatique » du son $\dfrac{\gamma p}{\rho}$. Nous appellerons τ_R « temps de relaxation » des fluctuations de température. L'existence d'un temps de relaxation indépendant de la dimension géométrique des perturbations est caractéristique de l'amortissement radiatif de perturbations optiquement minces. Il ne semble pas que la généralité de notre étude soit limitée par cette hypothèse. En effet, dans le cas de perturbations optiquement épaisses la loi de Newton peut être remplacée par une loi de diffusion :

$$Q \propto -\nabla^2 T,$$

qui conduit à des résultats semblables quant à la propagation des ondes. Plus généralement les résultats obtenus avec la loi de Newton sont représentatifs de l'effet de tous les phénomènes de relaxation de température (Markham, Beyer et Lindsay [21]) [1]. On considère habituellement deux formes limites de l'équation (29)

a) approximation des perturbations adiabatiques.

Si le *plus grand* temps caractéristique du mouvement est petit devant le temps de relaxation, on néglige Q et on écrit (29) sous la forme :

$$(31) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \right) p = \frac{p\gamma}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \right) \rho.$$

b) approximation des perturbations isothermes.

Si le plus petit temps caractéristique du mouvement est grand devant le temps de relaxation, on écrit (pour un fluide isotherme) :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \right) T = 0,$$

[1] Voir également l'article de M. J. Lighthill dans : Surveys in mechanics, G. K. Batchelor et R. M. Davis ed. Cambridge Univ. Press 1956.

soit en utilisant l'équation d'état des gaz parfaits :

$$(32) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}\right) p = \frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}.\boldsymbol{\nabla}\right)\rho$$

Cette équation se déduit *formellement* de (31) en écrivant $\gamma = 1$, ce qui semble avoir conduit certains auteurs à introduire un « γ effectif » compris entre c_p/c_v et 1 pour décrire la relaxation de température (Noyes et Leighton [25], Whitaker [46]). Nous montrerons qu'une telle démarche ne permet pas de rendre compte des conséquences physiques de la relaxation, et qu'en fait aucune des deux formes ne décrit correctement le rôle du rayonnement, *même comme cas limites*. Plus précisément, les formes (31) ou (32) de l'équation d'énergie ne peuvent être utilisées pour l'étude de la *dynamique* du problème, mais elles sont suffisantes pour mettre en évidence les aspects essentiels du phénomène de *filtrage* décrit aux paragraphes précédents.

Pour reconnaître le rôle spécifique des différentes propriétés physiques d'une atmosphère, nous allons étudier successivement des modèles caractéristiques des principales propriétés :

— la compressibilité,
— la relaxation thermique,
— la stratification.

II. État de mouvement dans un fluide homogène compressible perturbé par une source acoustique turbulente.

L'atmosphère la plus simple que nous puissions considérer correspond au fluide compressible en l'absence de gravité, c'est-à-dire au fluide homogène. En fait, il est impropre de parler alors d'atmosphère puisqu'une atmosphère est pratiquement stratifiée par définition. L'étude de ce cas est pourtant intéressante pour plusieurs raisons. Un fluide homogène ne possède ni fréquence propre, ni direction privilégiée. Étant une « atmosphère sans structure », l'étude de sa réponse mettra en évidence les propriétés liées uniquement à la structure de la source (Souffrin [33]). On notera également que la théorie de la génération du son par turbulence n'a été développée avec succès jusqu'à présent que dans le cas du fluide homogène.

Nous avons remarqué que le fluide homogène est physiquement isotrope, mais il apparaît évidemment une direction privilégiée en présence d'une source acoustique (dans le sens défini plus haut) répartie sur un plan. Ce que nous entendions précédemment par « plan horizontal » devient simplement « plan parallèle au plan de la source » si nous choisissons l'axe oz perpendiculaire à ce plan. Nous prendrons donc le plan de la source comme plan $z = 0$, l'« atmosphère » correspondant à $z > 0$. Pour la commodité du langage nous continuerons à désigner par *verticales et horizontales* les directions respectivement perpendiculaires et parallèles au plan de la source.

Étude du filtrage par un fluide homogène non dissipatif.

Conformément aux remarques du paragraphe « équation d'énergie » nous allons étudier le phénomène de filtrage en négligeant la dissipation, c'est-à-dire en admettant la validité de l'équation d'énergie (31). La solution des équations linéarisées est alors idéalement simple : les ondes planes se propagent dans toutes les directions sans dispersion avec la même vitesse c. L'opérateur $\mathfrak{L}$ de l'équation (9) est simplement, pour toutes les perturbations (vitesse, température, etc...), l'opérateur de propagation des ondes :

$$(33) \qquad \mathfrak{L} \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Facteur de transmission du fluide homogène.

Considérons par exemple les perturbations de pressions $\pi(x, y, z, t)$.

D'après (33) la solution de :

$$(34) \qquad \mathfrak{L}\pi(x, y, z, t) = 0,$$

vérifiant :

$$(35) \qquad \pi(x, y, o, t) = A(\boldsymbol{k}, \omega) \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} + \omega t),$$

où :

$$\boldsymbol{x} = (x, y), \qquad \boldsymbol{k} = (k_x, k_y),$$

est :

$$(36)\quad \pi(x, y, z, t) = A(\boldsymbol{k}, \omega) \left\{ (1 - R) \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} + \omega t - \varphi z) + R \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} + \omega t + \varphi z) \right\},$$

où :

$$(37)\quad \varphi^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2.$$

Si $\varphi^2 < 0$, (36) est simplement une superposition de deux ondes planes faisant avec le plan de la source l'angle θ défini par $\sin^2\theta = \dfrac{c^2 k^2}{\omega^2}$.

Le deuxième terme du second membre correspond à une onde réfléchie transportant de l'énergie vers la source. Comme nous supposons le fluide d'extension infinie et qu'il n'y a pas de source d'énergie pour $z > 0$ nous devons éliminer les ondes réfléchies et admettre $R = 0$ dans (36).

Si $\varphi^2 < 0$, (36) représente la superposition de deux états stationnaires, l'un d'amplitude croissante, l'autre d'amplitude décroissante quand z augmente. On ne peut invoquer le même argument que précédemment puisque le flux d'énergie associé aux deux modes est ici horiontal. Il n'est pas satisfaisant non plus d'éliminer la composante d'amplitude croissante pour avoir une amplitude finie à l'infini : la composante d'amplitude croissante, si elle existe, a pour conséquence la formation à distance finie d'une onde choc, ou tout au moins la non validité de l'approximation linéaire. La condition $R = 0$ intervient physiquement comme une condition de causalité quand on considère l'*établissement* de l'état stationnaire,

La démonstration de cette condition est assez complexe dans le cas du fluide non dissipatif (Lamb [16]), mais apparaîtra très simplement quand nous introduirons la dissipation.

(36) représente alors l'onde évanescente.

On peut écrire la solution de (34)-(35),

$$(38)\quad \pi(x, y, z, t) = A(\boldsymbol{k}, \omega)\, f(k, \omega, z) \exp i(\omega t + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}),$$

avec :

$$(39)\quad f(k, \omega, z) = \exp -i\sqrt{\varphi^2}\, z \quad \text{si} \quad \varphi^2 > 0,$$

et :

$$(40)\quad f(k, \omega, z) = \exp -\sqrt{-\varphi^2}\, z \quad \text{si} \quad \varphi^2 < 0.$$

Le facteur de transmission du fluide homogène pour les perturbations de pression est donc :

$$(41)\quad \begin{cases} |f|^2 = 1 & \text{si} \quad k < \dfrac{\omega}{c}, \\ |f^2| = \exp -2z\sqrt{k^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}} & \text{si} \quad k > \dfrac{\omega}{c}. \end{cases}$$

Les deux catégories de modes existants dans le fluide homogène définissent donc le diagramme diagnostique de ce fluide par la diagonale du plan $(k, \omega/c)$.

Les composantes de la vitesse s'obtiennent en substituant (38) dans :

$$(42)\quad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\nabla} \pi,$$

d'où pour la vitesse verticale

$$(43)\quad \begin{cases} V_z = +\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\sqrt{\varphi^2}}{\omega} f(k, \omega, z)\, A(k, \omega) \\ \qquad\qquad \exp i(\omega t + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}) \text{ si } \varphi^2 > 0, \\ V_z = -\dfrac{i}{\rho} \dfrac{\sqrt{-\varphi^2}}{\omega} f(k, \omega, z)\, A(k, \omega) \\ \qquad\qquad \exp i(\omega t + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}) \text{ si } \varphi^2 < 0, \end{cases}$$

et pour la vitesse horizontale

$$(44)\quad \boldsymbol{V}_\perp = -\frac{\boldsymbol{k}}{\rho\omega} f(k, \omega, z)\, A(k, \omega) \exp i(\omega t + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}).$$

Enfin l'équation d'énergie :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

et l'équation d'état :

$$\frac{\delta\theta}{T} = \frac{\delta p}{p} - \frac{\delta\rho}{\rho}$$

montrent que les fluctuations de densités et de température sont simplement proportionnelles aux fluctuations de pression. Dans la suite nous ne considérerons donc que les fluctuations de pressions, tous les *résultats étant valables également pour la densité et la température.*

Réponse à une excitation aléatoire. Solution formelle.

On passe de la solution (38) à (44), correspondant à une source périodique, à la solution correspondant à une source aléatoire en utilisant la règle énoncée au chapitre I et les définitions (21) à (26).

Soit $F_0(k, \omega)$ *la densité spectrale des fluctuations de pression de la source, les caractéristiques statistiques du mouvement sont* :

Fonction d'autocorrélation des pressions :

$$(45)\quad \Phi_{\pi z}(\boldsymbol{r}, \tau) = \int \boldsymbol{dk}\, d\omega\, |f|^2\, F_0(\boldsymbol{k}, \omega) \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} + \omega\tau).$$

Fonction d'autocorrélation des vitesses verticales :

$$(46)\quad \Phi_{Vz}(\boldsymbol{r},\tau)=\frac{1}{\rho^2}\int \boldsymbol{dk}\,d\omega\,|f|^2\,\frac{|\varphi^2|}{\omega^2}\,F_0(\boldsymbol{k},\omega)\exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}+\omega\tau)$$

Fonction d'autocorrélation des vitesses longitudinales :

$$(47)\quad \Phi_{Lz}(\boldsymbol{r},\tau)=\frac{1}{\rho^2}\int \boldsymbol{dk}\,d\omega\,|f|^2\,\frac{(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r})^2}{r^2}\,F_0(\boldsymbol{k},\omega)\exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}+\omega\tau).$$

Fonction d'autocorrélation des vitesses transversales :

$$(48)\quad \Phi_{Tz}(\boldsymbol{r}.\tau)=\frac{1}{\rho^2}\int \boldsymbol{dk}\,d\omega\,|f|^2\,\frac{(\boldsymbol{k}\wedge\boldsymbol{r})^2}{r^2}\,F_0(\boldsymbol{k},\omega)\exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}+\omega\tau).$$

Ces relations définissent l'image à la distance z de la source en fonction de $F_0(k,\omega)$. Il convient de remarquer que seules (45) et (46) sont des transformations de Fourier, le noyau des intégrales figurant dans (47) et (48) contenant explicitement $\boldsymbol{r}$.

Ces expressions se simplifient si on tient compte de l'*isotropie* de la source. En effet si $F_0(\boldsymbol{k},\omega)$ ne dépend que du module de $\boldsymbol{k}$, on peut intégrer sur l'angle polaire dans le plan des $\boldsymbol{k}$. En utilisant les relations (Petiau [26]) :

$$\int_0^{2\pi} d\theta\cos(kr\cos\theta)=2\pi\,J_0(kr),$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta\sin^2\theta\cos(kr\cos\theta)=2\pi\,\frac{J_1(kr)}{kr},$$

où J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel d'ordres 0 et 1, on obtient :

$$\Phi_{\pi z}(r,\tau)=2\pi\int_0^{\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\;e^{i\omega\tau}\,k\,J_0(kr)\,|f|^2\,F_0(k,\omega),$$

$$(49)\quad \begin{cases} \Phi_{Vz}(r,\tau)=\dfrac{2\pi}{\rho^2}\displaystyle\int_0^{\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\;e^{i\omega\tau}\,k\,\frac{J_0(kr)}{\omega^2}\left|\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right|\,|f|^2\,F_0(k,\omega), \\ \Phi_{Tz}(r,\tau)=\dfrac{2\pi}{\rho^2}\displaystyle\int_0^{\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\;e^{i\omega\tau}\,k\,\frac{J_1(kr)}{kr}\,\frac{k^2}{\omega^2}\,|f|^2\,F_0(k,\omega), \\ \Phi_{Lz}(r,\tau)=\dfrac{2\pi}{\rho^2}\displaystyle\int_0^{\infty}dk\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega\;e^{i\omega\tau}\,k\left[J_0(kr)-\frac{J_1(kr)}{kr}\right]\frac{k^2}{\omega^2}\,|f|^2\,F_0(k,\omega). \end{cases}$$

De la même façon on obtient pour la *corrélation vitesse verticale-température* :

$$(50)\quad \mathcal{E}=\frac{4\pi}{\rho c}\int_{\varphi^2>0}d\omega\,dk\,\frac{k}{\omega}\sqrt{\varphi^2}\,F_0(k,\omega)\,|f|^2-\frac{4\pi}{\rho c}\,i\int_{\varphi^2<0}d\omega\,dk\,\frac{k}{\omega}\sqrt{-\varphi^2}\,F_0(k,\omega)\,|f|^2,$$

en notant $\displaystyle\int_{\varphi^2\lessgtr 0} dk d\omega$ l'intégration sur la partie de plan (k,ω) définie par $\varphi^2\lessgtr 0$.

Cette relation traduit une différence importante entre les modes acoustiques et les modes évanescents : vitesse verticale et fluctuation de pression sont en phase pour les modes acoustiques, et en quadrature pour les modes évanescents. Le déphasage vitesse verticale-température résulte d'une moyenne pondérée :

$$(51)\quad \operatorname{tg}\delta=-\int_{\varphi^2<0}dk\,d\omega\,\frac{k}{\omega}\,|f|^2\sqrt{-\varphi^2}\;F_0(k,\omega)\Big/\int_{\varphi^2>0}d\omega\,dk\,\frac{k}{\omega}\,|f|^2\sqrt{\varphi^2}\,F_0(k,\omega).$$

La différence de phase δ est une mesure de l'importance relative des composantes acoustiques et évanescentes du mouvement, donc de l'efficacité du mouvement pour le transport d'énergie.

La structure de la source.

Pour pouvoir expliciter les relations (49), nous devons maintenant déterminer la forme de la fonction $F_0(k,\omega)$ en fonction de la nature physique de la source. On ne dispose pratiquement d'aucun argument théorique pour déterminer $F_0(k,\omega)$ dans l'hypothèse de l'instabilité thermique turbulente. L'observation des fluctuations de brillance de la surface solaire conduit à des fonctions d'auto-corrélation spatiale en forme de courbe en cloche. Nous décrirons ce caractère en représentant par :

$$(52)\qquad \Phi_{\pi 0}(r,0)\propto\exp-\frac{r^2}{2L^2},$$

une source constituée d'éléments turbulents de « taille » L. Quoique représentant qualitativement assez bien les observations, la forme *précise* (51) n'a pas d'autre justification que la simplicité du traitement analytique qu'elle autorise. On peut montrer (Appendice) qu'une densité de la forme

$$(53)\qquad F_0(k,\omega)=H(\omega)\exp-\frac{k^2L^2}{2},$$

conduit à l'autocorrélation (52) quel que soit $H(\omega)$.

Dans toute la suite nous représenterons l'aspect turbulent de la source par une densité spectrale de la forme (53). Nous verrons cependant que les principales propriétés qualitatives que nous obtiendrons avec ce modèle sont très générales.

D'après (49) et (53) on a :

$$(54) \qquad \Phi_{\pi 0}\ (0, \tau) = \frac{2\pi}{L^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ e^{i\omega\tau}\ H(\omega).$$

La fonction $H(\omega)$, qui décrit l'aspect de la source en fonction du temps, est le *spectre de puissance* des fluctuations de pression.

L'étude en laboratoire de la génération du son par turbulence indique que si un écoulement supersonique est caractérisé par une *vitesse de turbulence* V et une dimension géométrique l, le spectre du bruit émit admet un maximum très prononcé pour une fréquence de l'ordre de V/l.

L'expression obtenue par Lighthill pour la puissance acoustique rayonnée, très bien confirmée par l'expérience, repose explicitement sur l'émission d'une fréquence privilégiée.

Nous schématiserons une telle situation en supposant le spectre de la source concentré à la fréquence ω_0, ce qui correspond à :

$$(55) \qquad H\ (\omega) \propto \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)$$

δ étant la « fonction » de Dirac. On peut considérer la source comme étant composée de pistons oscillant tous avec la même fréquence ω_0, mais de phase aléatoire. *Nous dirons alors que le fluide est excité par des pistons de taille L et de fréquence* ω_0.

Les conditions *géométriques* de l'émission acoustique sont cependant différentes dans les conditions de laboratoire (jets) et dans les conditions stellaires.

L'hypothèse d'une émission concentrée au voisinage d'une fréquence privilégiée peut être très incorrecte dans le cas où la source physique de l'émission est une zone convective turbulente inhomogène : il est alors difficile d'associer une longueur caractéristique unique au mouvement. Au mieux peut-on définir une longueur caractéristique, par exemple une échelle de hauteur, à chaque profondeur. On peut s'attendre à ce qu'il en résulte un spectre de fréquence étalé.

Pour étudier le rôle de l'extension du spectre de fréquence, nous considérons dans la suite une source telle que :

$$(56) \qquad \Phi_{T0}\ (r, \tau) \propto \exp - \left(\frac{\tau^2}{2\theta^2} + \frac{r^2}{2L^2} \right)$$

Une telle fonction d'autocorrélation correspond à un champ de vitesses dépourvu de tout caractère oscillatoire, et correspond qualitativement au cas de la turbulence homogène. Nous désignerons une source du type (56) sous le nom de *source turbulente de dimension L et de durée de vie* θ.

Nous allons examiner successivement la réponse du fluide aux deux types de sources considérées ci-dessus.

Étude du fluide homogène excité par des pistons.

La source est alors définie par la densité spectrale :

$$(57) \qquad F_0\ (k, \omega) = \frac{1}{2}\ (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))\ \exp - \frac{k^2 L^2}{2},$$

En substituant (57) dans (49) on voit que le mouvement est périodique de fréquence ω_0 à toutes les distances de la source. Nous n'étudierons donc que la structure spatiale.

Considérons la structure spatiale de la source.

Pour le *champ de pression* on a d'après (49) :

$$\Phi_{\pi 0}\ (r,_0) = 2\pi \int_0^\infty dk\ k J_0\ (kr)\ \exp - \frac{k^2 L^2}{2},$$

soit (Appendice) :

$$(58) \qquad \Phi_{T0}\ (r, 0) = \Phi_{\pi 0}\ (0, 0)\ e^{-\frac{r^2}{2L^2}}.$$

De même, pour les *vitesses transversales* :

$$\Phi_{T0}\ (r, 0) = \frac{2\pi}{\rho^2 \omega_0^2} \int_0^\infty dk\ kk^2\ \frac{J_1\ (kr)}{kr}\ \exp - \frac{k^2 L^2}{2},$$

qui s'écrit (Appendice) :

$$(59) \qquad \Phi_{T0}\ (r, 0) = \Phi_{T0}\ (0, 0)\ e^{-\frac{r^2}{2L^2}}.$$

En fait, ce sont les relations (58) et (59) qui ont guidé le choix de $F_0(k, \omega)$. (58) est en fait une *définition* de la source, et nous pouvons considérer le fait que (59) est de la même forme comme argument en faveur de cette définition.

Pour les vitesses longitudinales :

$$\Phi_{L0}\ (r, 0) = \frac{2\pi}{\rho^2 \omega_0^2} \int_0^\infty dk\ kk^2 \left\{ J_0\ (kr) - \frac{J_1\ (kr)}{kr} \right\} \exp - \frac{k^2 L^2}{2},$$

soit (Appendice) :

$$(60) \qquad \Phi_{L0}\ (r, 0) = \Phi_{L0}\ (0, 0) \left(1 - \frac{r^2}{L^2} \right) e^{-\frac{r^2}{2L^2}}.$$

Le changement de signe de l'autocorrélation

longitudinale constitue une propriété remarquable du champ de vitesse. Montrons que c'est une propriété tout à fait générale, indépendante du choix particulier que nous avons fait de la forme de $F_0(k, \omega)$. En effet, en utilisant (PETIAUD [26]) :

$$J_0(x) = J_1'(x) + \frac{J_1(x)}{x},$$

où J_1' est la dérivée de J_1, on peut écrire

$$\Phi_{Lz}(r, 0) \propto \int_0^\infty dk\, k^2\, J_1'(kr) \int_0^\infty d\omega\, |f|^2 \frac{F_0(k, \omega)}{\omega^2},$$

d'où par intégration sur r, avec $J_1(0) = J_1(\infty) = 0$.

$$\int_0^\infty \Phi_{Lz}(r, 0)\, dr = 0. \tag{61}$$

$\Phi_{Lz}(r, 0)$ ne peut donc être partout positive. Cette relation montre la complète généralité, quelle que soit la densité spectrale $F_0(k, \omega)$, du changement de signe de la fonction d'autocorrélation longitudinale des vitesses. Il est intéressant de rapprocher ces résultats de ceux classiques en théorie de la turbulence homogène d'un fluide incompressible : on montre alors (BATCHELORD [3]) que la fonction d'autocorrélation *transversale* vérifie (avec nos notations) :

$$\int_0^\infty \Phi_T(r, 0)\, r\, dr = 0,$$

et présente donc un changement de signe, alors que la fonction d'autocorrélation *longitudinale* est toujours positive. Nous obtenons précisément la situation inverse. Ceci reflète la profonde différence des situations considérées : nous négligeons l'aspect non linéaire des équations de Navier-Stokes et nous faisons jouer un rôle essentiel à la compressibilité, à l'opposé des hypothèses de la théorie de la turbulence homogène. Il n'est cependant pas surprenant de trouver des similitudes entre les deux situations en ce qui concerne les propriétés purement cinématiques.

Considérons maintenant le champ de *vitesses verticales*.

D'après (49),

$$\Phi_{V0}(r, 0) = \frac{2\pi}{\rho^2 \omega_0^2} \int_0^\infty dk\, k \left| k^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2} \right| J_0(kr) \exp -\frac{k^2 L^2}{2}.$$

Posons :

$$k_c = \frac{\omega_0}{c}. \tag{62}$$

$2\pi/k_0$ est la longueur d'onde de la propagation associée à la fréquence des pistons. Nous appellerons *dimension relative* des pistons le produit $k_c L$. La structure du champ de vitesse verticale dépend explicitement de cette dimension relative. Si les *pistons sont petits*, soit si $k_c L \ll 1$ on a approximativement :

$$\Phi_{V0}(r, 0) \approx \frac{2\pi}{\rho^2 \omega_0^2} \int_0^\infty dk\, k\, k^2\, J_0(kr)\, e^{-\frac{k^2 L^2}{2}},$$

soit (Appendice) :

$$\Phi_{V0}(r, 0) \approx \Phi_{V0}(0, 0) \left(1 - \frac{r^2}{2L^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2L^2}} \quad \text{pour } k_c L \ll 1. \tag{63}$$

Le changement de signe de l'autocorrélation (63) est une propriété générale du mouvement à la limite $k_c L \ll 1$.

En effet, on peut écrire dans ce cas :

$$\Phi_{V0}(r, 0) \approx \frac{2\pi}{\rho^2} \int_0^\infty dk\, k J_0(kr)\, k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{F_0(k, \omega)}{\omega^2}$$

soit en inversant la transformée de Hankel :

$$k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{F_0(k, \omega)}{\omega^2} \approx \int_0^\infty dr\, r\, J_0(kr)\, \Phi_{V0}(r, 0),$$

d'où pour $k = 0$

$$\int dr\, r\, \Phi_{V0}(r, 0) \approx 0, \tag{64}$$

ce qui démontre que $\Phi_{V0}(r, 0)$ présente un changement de signe.

Si au contraire les *pistons sont grands*, soit $k_c L \gg 1$ on peut écrire :

$$\Phi_{V0}(r, 0) = \frac{2\pi}{\rho^2 c^2} \int_0^\infty dk\, k\, J_0(kr) \exp -\frac{k^2 L^2}{2}.$$

On retrouve la même intégrale que pour les fluctuations de pressions :

$$\Phi_{V0}(r, 0) \approx \frac{1}{\rho^2 c^2} \Phi_{\pi 0}(r, 0) \quad \text{pour} \quad k_c L \gg 1. \tag{65}$$

Les développements donnés en appendice permettent de justifier rigoureusement les approximations utilisées et de calculer facilement les fonctions d'autocorrélation pour les valeurs intermédiaires de la taille $k_c L$ des pistons.

On voit que la source se présente très différemment suivant la valeur de la dimension horizontale caractéristique des fluctuations de pression (ou de densité, ou de température). Si cette longueur est grande devant la longueur d'onde $2\pi\omega_0/c$, la struc-

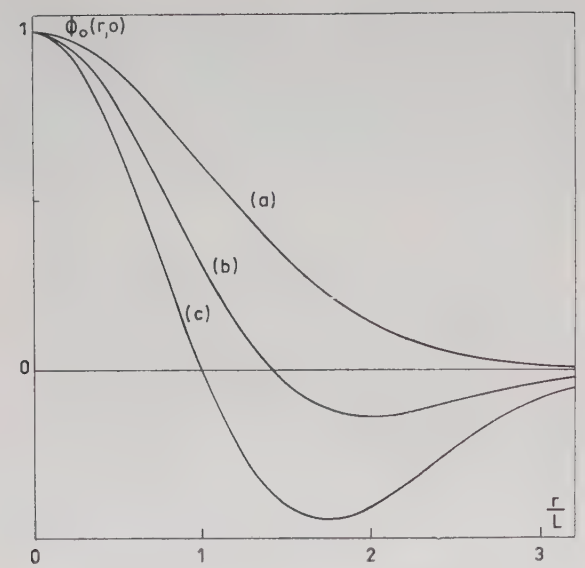

FIG. 1. — Fonctions d'autocorrélation spatiale au niveau de la « source » dans un fluide homogène excité par des pistons de dimension L. (*a*) : pression $\Phi_{\pi 0}(r, 0)$ et vitesse transversale $\Phi_{T0}(r, 0)$; (*c*) : vitesse longitudinale $\Phi_{L0}(r, 0)$; le champ de vitesse verticale $\Phi_{V0}(r, 0)$ est représenté par (*a*) si $L\omega_0 \gg c$ et par (*b*) si $L\omega_0 \ll c$.

ture horizontale de la source est la même pour le champ de vitesse verticale et pour les champs scalaires (pression, densité, température). Ce résultat s'explique facilement si on remarque qu'une source constituée de grands pistons excite essentiellement des modes acoustiques à propagation presque verticale. En effet pour la propagation presque verticale la vitesse verticale est pratiquement égale à la vitesse totale, et pour une onde plane la perturbation de pression est liée à la vitesse totale par la relation :

$$|\pi| = \rho c\, |\boldsymbol{v}|,$$

qui est équivalente à (65).

Au contraire, si les ondes obliques (par rapport au plan de la source) et /ou les ondes évanescentes sont importantes, il n'y a plus proportionnalité entre les densités spectrales des pressions et des vitesses verticales : il suffit de remarquer que $k = k_c$ correspond à une onde plane se propageant horizontalement, donc à une composante verticale de la vitesse nulle quelles que soient les fluctuations de pression.

Il est clair que ces relations entre la structure spatiale de la vitesse verticale et celle de la pression sont valables d'une fa on très générale quelle que soit la forme de $F_0(k, \omega)$.

La figure 1 illustre les relations (58), (59), (60) et (65).

Nous allons maintenant étudier l'image que le fluide homogène donne de la source ainsi définie.

Image à l'infini.

D'après l'expression (41) du facteur de transmission, le filtrage consiste ici en une atténuation progressive, quand on s'éloigne de la source, de la contribution des modes évanescents. L'effet du filtrage sera donc particulièrement simple si on considère l'image à *grande distance* de la source, que nous appellerons « image à l'infini ». En effet, à grande distance, les modes évanescents sont éliminés dans toutes les densités spectrales, alors que les modes acoustiques y figurent non modifiés : l'atmosphère se comporte comme un filtre passe-bas pour les fréquences spatiales horizontales de la même fa on que la pupille d'un instrument d'optique pour les fréquences spatiales de l'objet. C'est ce que traduit la forme assymptotique du facteur de transmission :

$$(66)\qquad \begin{cases} |f(k, \omega_0, \infty)|^2 = 1 & \text{pour} \quad k < k_c, \\ |f(k, \omega_0, \infty)|^2 = 0 & \text{pour} \quad k > k_c, \end{cases}$$

où :

$$k_c = \omega_0/c$$

En portant (66) et (57) dans (49), on obtient pour l'image à l'infini les fonctions d'autocorrélation :

$$(67)\qquad \begin{cases} \Phi_{\pi\infty}(r, 0) = 2\pi \displaystyle\int_0^{k_c} dk\, k J_0(kr) \exp -\frac{k^2 L^2}{2}, \\ \Phi_{T\infty}(r, 0) = \dfrac{2\pi}{\rho^2 c^2} \dfrac{1}{k_c^2} \displaystyle\int_0^{k_c} dk\, k k^2 \frac{J_1(kr)}{kr} \exp -\frac{k^2 L^2}{2}, \\ \Phi_{L\infty}(r, 0) = \dfrac{2\pi}{\rho^2 c^2} \dfrac{1}{k_c^2} \displaystyle\int_0^{k_c} dk\, k k^2 \left(J_0(kr) - \frac{J_1(kr)}{kr} \right) \exp -\frac{k^2 L^2}{2}. \\ \Phi_{V\infty}(r, 0) = \dfrac{2\pi}{\rho^2 c^2} \dfrac{1}{k_c^2} \displaystyle\int_0^{k_c} dk\, k \left(\frac{\omega_0^2}{c^2} - k^2 \right) J_0(kr) \exp -\frac{k^2 L^2}{2}. \end{cases}$$

Si on compare (67) aux expressions correspondant pour la source, il est clair que la relation entre les structures de la source et de l'image dépend qualitativement de la largeur relative des pistons. Considérons, en effet, les cas extrêmes $k_c L \ll 1$ (très petits pistons) et $k_c L \gg 1$ (très grands pistons).

1) Pour $k_c L \gg 1$, l'excitation est essentiellement limitée aux modes acoustiques $k < k_c$. On peut remplacer l'intégration de 0 à k_c par l'inté-

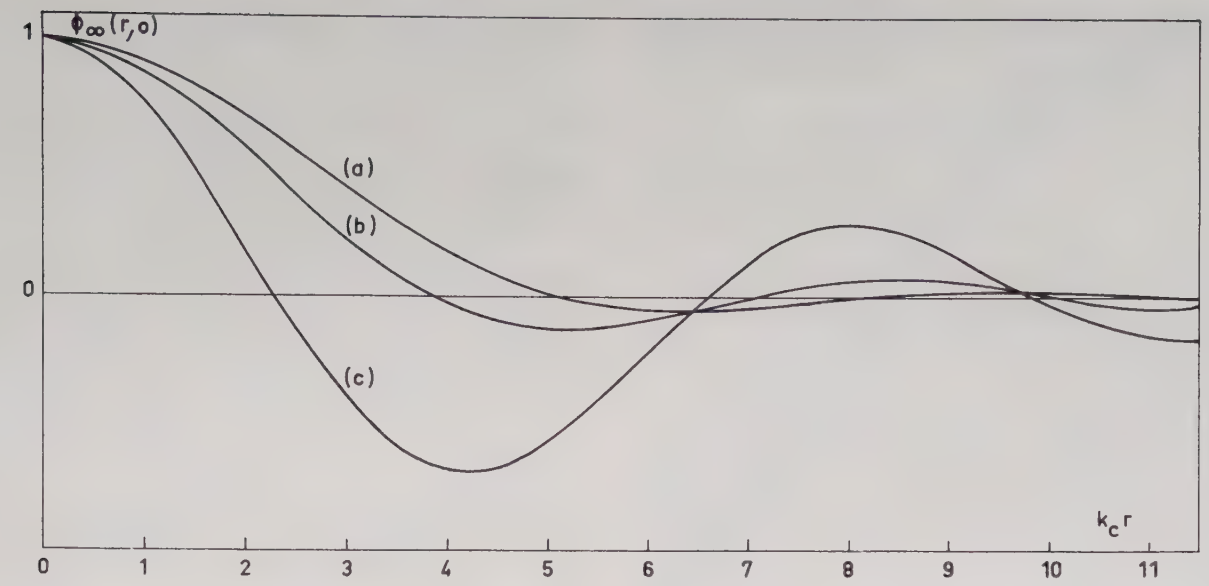

FIG. 2. — Fonctions d'autocorrélation spatiale du mouvement « diffracté » à l'infini dans une atmosphère excitée par des pistons de petite dimension ($k_c L \ll 1$). (*a*) : vitesse verticale $\Phi_{V\infty}(r, 0)$ et vitesse transversale $\Phi_{T\infty}(r, 0)$; (*b*) : pression $\Phi_{\pi\infty}(r, 0)$; (*c*) : vitesse longitudinale $\Phi_{T\infty}(r, 0)$. k_c est donné par l'équation (66) pour un fluide homogène et par l'équation (72) pour une atmosphère isotherme.

gration de 0 à l'infini dans toutes les équations (67) qui deviennent alors identiques aux expressions correspondant pour la source, soit.

$$\Phi_{\infty}(r, 0) \approx \Phi_0(r, 0), \tag{68}$$

pour toutes les grandeurs physiques.

Dans un fluide homogène excité par des pistons de grande extension horizontale, la structure du mouvement est indépendante de la distance à la source. Il est clair que ce résultat est indépendant de la structure spatiale particulière que nous avons choisie pour la source, à condition d'en définir la largeur d'une fa on convenable.

2) Pour $k_c L \ll 1$, l'excitation est au contraire très importante dans les modes $k \gg k_c$ filtrés par l'atmosphère. Nous examinerons plus loin l'influence de ce filtrage sur l'*amplitude* du mouvement. En ce qui concerne la structure horizontale, on peut remplacer dans (67) la densité $\exp -\frac{k^2 L^2}{2}$ par 1 dans les intégrales. Les relations (67) apparaissent alors comme indépendantes de la *structure* horizontale de la source si les dimensions caractéristiques de cette structure sont assez petites.

La structure du champ des fluctuations de pressions (ou de densité, ou de température) est alors donnée par :

$$\Phi_{\pi\infty}(r, 0) = 2\pi \int_0^{k_c} dk\, k J_0(kr).$$

Cette intégrale est classique dans la théorie de la diffraction d'une onde plane par une ouverture circulaire. Elle donne la répartition d'amplitude dans la tâche de diffraction d'Airy. On peut l'écrire :

$$\Phi_{\pi\infty}(r, 0) = \Phi_{\pi\infty}(0, 0)\, 2\, \frac{J_1(k_c r)}{k_c r}. \tag{69}$$

On obtient de même pour les vitesses transversales :

$$\Phi_{T\infty}(r, 0) = \frac{2\pi}{\rho^2 c^2} \frac{1}{k_c^2} \int_0^{k_c} dk\, k k^2 \frac{J_1(kr)}{kr},$$

soit encore (Appendice) :

$$\Phi_{T\infty}(r, 0) = \Phi_{T\infty}(0, 0)\, 8\, \frac{J_2(k_c r)}{(k_c r)^2}, \tag{70}$$

et pour les vitesses longitudinales,

$$\Phi_{L\infty}(r, 0) = \frac{2\pi}{\rho^2 c^2} \frac{1}{k^2} \int_0^{k_c} dk\, k k^2 \left\{ J_0(kr) - \frac{J_1(kr)}{kr} \right\},$$

soit d'après les relations données en appendice :

$$\Phi_{L\infty}(r, 0) = \Phi_{L\infty}(0, 0)\, 8 \left\{ \frac{J_1(k_c r)}{k_c r} - 3\, \frac{J_2(k_c r)}{(k_c r)^2} \right\} \tag{71}$$

Enfin le champ des vitesses verticales est décrit par :

$$\Phi_{V\infty}(r, 0) = \frac{2\pi}{\rho^2 c^2} \frac{1}{k^2} \int_0^{k_c} dk\, k(k^2 - k_c^2)\, J_0(kr).$$

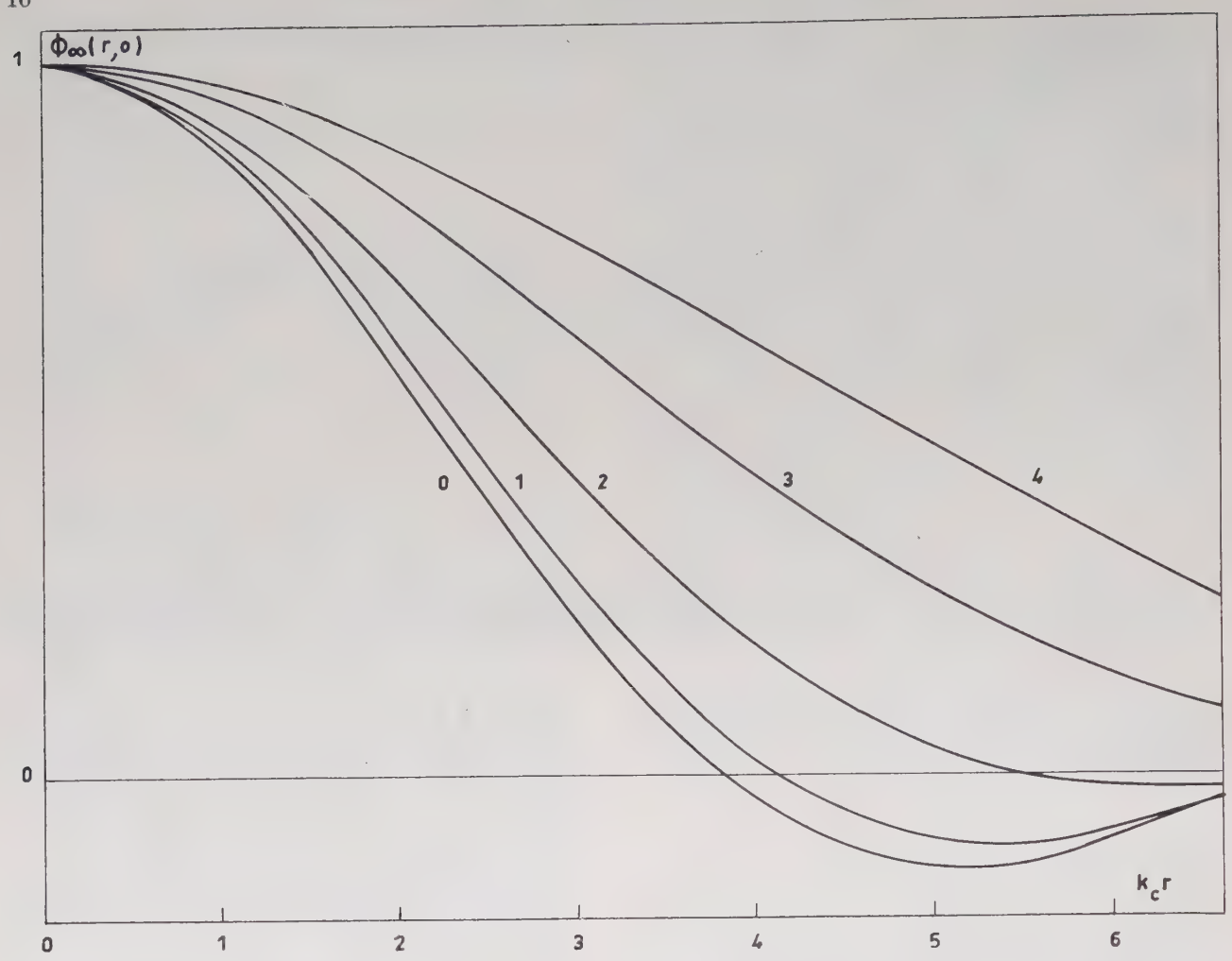

FIG. 3. — Fonctions d'autocorrélation spatiale du champ de pression à l'infini dans une atmosphère excitée par des pistons. Les courbes sont indexées par k_c L, où L est la demi-largeur de la gaussienne représentant la source et où k_c a le même sens que pour la figure 2.

Cette intégrale s'exprime à l'aide des précédentes. On obtient :

$$(72) \qquad \Phi_{V\infty}(r, 0) = \Phi_{V\infty}(0, 0)\, 8\, \frac{J_2(k_c r)}{(k_c r)^2}.$$

En comparant avec (70) on voit que l'image à l'infini a la même structure en vitesses transversales et en vitesses verticales, alors que ces deux champs ont des structures différentes au niveau de la source (d'après (60) et (63). Le calcul explicite de (67) (Appendice) montre que cette identité de structures n'est réalisée qu'à la limite d'une source de dimension relative k_c L nulle.

La figure 2 illustre les relations (69) à (72) dont on peut résumer les caractéristiques principales de la façon suivante :

Un fluide homogène excité au voisinage d'une fréquence ω_0 par des éléments de très petites dimensions $\left(L \ll \frac{c}{\omega_0}\right)$ donne à l'infini une image diffractée constituée d'éléments de dimensions de l'ordre de $\frac{c}{\omega_0}$ oscillant à la même fréquence.

Nous avons défini les « très petits éléments » et les « très grands » éléments par les inégalités $L\omega_0 \ll c$ et $L\omega_0 \gg c$. Pour préciser le sens de ces expressions, nous donnons en Appendice des développements des intégrales intervenant dans (67) en série de puissance de k_c L et de $(k_c L)^{-1}$ permettant le calcul pratique de l'image à l'infini pour une source de largeur quelconque. La figure 3 illustre le champ de pression $\Phi_{\pi\infty}(r, 0)$ pour diverses valeurs de la dimension $L\omega_0/c$ des éléments de la source. Cette figure montre, et les relations données en Appendice précisent, qu'on peut pratiquement considérer la source comme très petite si $L \gtrsim \frac{c}{\omega_0}$: les modes évanescents sont alors trop importants pour qu'on puisse déterminer la structure de la

source à partir de l'observation de l'image à l'infini. Il y a là une limitation importante de l'information contenue dans le mouvement lointain : *la structure horizontale du mouvement ne peut avoir de dimension caractéristique inférieure à* c/ω_0.

Les relations données en Appendice montrent d'autre part qu'on peut considérer les éléments de la source comme grands dès $L \gtrsim 3\, c/\omega_0$.

Nous venons d'examiner la façon dont le filtrage modifie la structure spatiale du mouvement. Nous allons considérer maintenant quelques propriétés cinématiques en nous limitant à celles qui sont intéressantes (parce qu'observables) dans le cas de l'atmosphère solaire.

La vitesse verticale et les fluctuations de température sont évidemment en phase pour le mouvement à l'infini qui est une superposition de modes acoustiques ayant tous cette propriété. Il en est de même au niveau de la source si $L \gg \dfrac{c}{\omega_0}$ puisque dans ce cas les modes acoustiques dominent.

Au contraire si les éléments de la source sont petits, la différence de phase y est déterminée par les modes évanescents pour lesquels vitesse verticale et température sont en quadrature. *Le déphasage varie avec la distance à la source de façon à compenser les variations d'amplitudes des fluctuations et maintenir constant le flux d'énergie acoustique.*

Quantitativement, avec la source gaussienne (57), on a d'après (51) :

$$(73)\quad \begin{cases} \operatorname{cotg}\delta = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{k_c L}{\sqrt{2}}} dx\, e^{x^2} x^2 & \text{pour } z = 0, \\ \operatorname{cotg}\delta \to -\infty & \text{pour } z \to \infty \end{cases}$$

On obtient de même pour la variation de l'*amplitude* des fluctuations de pression, des vitesses verticales et des vitesses transversales, entre la source et l'image à l'infini :

$$(74)\quad \begin{cases} \Phi_{\pi\infty}(0,0)/\Phi_{\pi 0}(0,0) = 1 - \exp -\dfrac{l^2}{2}, \\ \Phi_{T\infty}(0,0)/\Phi_{T0}(0,0) \\ \qquad = 1 - \exp -\dfrac{l^2}{2} - \dfrac{l^2}{2}\exp -\dfrac{l^2}{2}, \\ \Phi_{v\infty}(0,0)/\Phi_{v0}(0,0) = \left(\exp -\dfrac{l^2}{2} + \dfrac{l^2}{2} - 1\right) \Big/ \\ \qquad \left\{\left(1+\dfrac{l^2}{2}\right)\exp -\dfrac{l^2}{2} + \dfrac{l^2}{2}\right\}, \\ \text{où } l^2 = k_c^2 L^2. \end{cases}$$

Considérons enfin l'*anisotropie des vitesses* caractérisée par le rapport des amplitudes *vitesses verticales* et *horizontales* :

$$R_z = \frac{\langle v_z^2 \rangle}{\langle v_x^2 + v_y^2 \rangle},$$

soit :

$$R_z = \frac{\Phi_{Vz}(0,0)}{2\Phi_{Lz}(0,0)}.$$

Il est facile de voir que dans le cas d'une source constituée d'éléments « très grands » ou « très petits » le fluide homogène donne une image ayant la même anisotropie que la source. C'est évident dans le cas des grands pistons $k_c L \gg 1$ puisque source et image sont identiques : elles contiennent des modes acoustiques se propageant presque verticalement, donc à vitesse essentiellement verticale. Dans le cas des petits pistons il est nécessaire de considérer l'hodographe des vitesses des différents modes. Pour les modes *acoustiques*, le champ de vitesse est *polarisé rectilignement*, parallèlement à la direction de propagation. Pour les modes *évanescents* le champ de vitesse est *polarisé elliptiquement*, le grand axe étant horizontal et le rapport des axes étant d'après (42) égal à :

$$(75)\qquad r = \left(1 - \frac{k_c^2}{k^2}\right)^{1/2}.$$

Au niveau de la source, le mouvement de petits éléments est caractérisé par une grande importance relative des modes évanescents de grand nombre d'onde k, dont le champ de vitesse est donc polarisé *circulairement* d'après (75). On a donc un champ de vitesse isotrope, soit :

$$R_0 \approx 1.$$

Loin de la source, il ne reste que les modes acoustiques polarisés rectilignement, mais si la source est constituée de petits éléments la densité spectrale $F_0(k, \omega_0)$ est pratiquement constante pour $k \leqslant k_c$, ce qui correspond à une *répartition isotrope des directions de propagation.* On aura donc

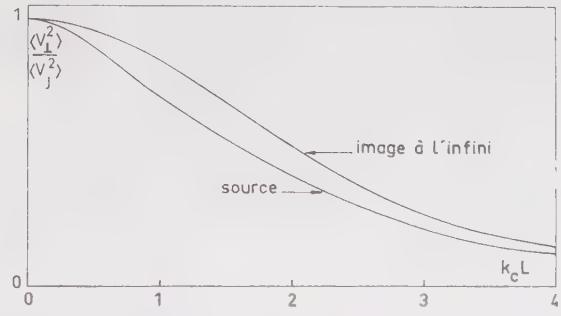

FIG. 4. — Anisotropie du champ de vitesse au niveau de la source et à l'infini en fonction de la largeur relative des éléments de la source.

également un champ de vitesse isotrope à l'infini :

$$R_\infty \approx 1,$$

bien que la nature du mouvement soit profondément différente.

Ces remarques sont évidemment valables d'une façon très générale. On peut les illustrer quantitativement avec la source gaussienne (57).

On obtient :

$$(76)\quad \begin{cases} R_0 = \dfrac{l^2}{2} + \left(\exp -\dfrac{l^2}{2}\right)\left(1 + \dfrac{l^2}{2}\right), \\ R_\infty = \left(\dfrac{l^2}{2} - 1 + \exp -\dfrac{l^2}{2}\right) \Big/ \left(1 - \left(1 + \dfrac{l^2}{2}\right)\exp -\dfrac{l^2}{2}\right), \\ l^2 = k_c^2\, L^2. \end{cases}$$

On voit (fig. 4) que la relation :

$$R_0 \approx R_\infty,$$

est assez bien vérifiée pour toutes les valeurs de la dimension k_c L des pistons. La discussion précédente montre cependant que pour les petites dimensions, cette égalité cache un changement de nature du mouvement : dans le voisinage de source où ce changement de nature se produit (et que nous préciserons plus loin) l'anisotropie du mouvement varie avec la distance à la source. En effet, d'après l'expression (41) du facteur de transmission et l'expression (75) de l'excentricité de l'hodographe, les modes évanescents sont amortis d'autant moins fortement que la composante horizontale du mouvement est plus importante, ce qui modifie la mesure de l'anisotropie. Pour $k_c L \ll 1$, on a au voisinage de la source $R_z < R_0$. On peut résumer ce dernier résultat de la façon suivante :

Dans un fluide homogène excité par des éléments de très petites dimensions $\left(L \ll \dfrac{c}{\omega_0}\right)$ le champ de vitesses, isotrope au niveau de la source, devient à prédominence horizontale puis tend à nouveau vers l'isotropie qui au fur et à mesure s'éloigne de la source.

Étude du fluide homogène excité par une source turbulente.

Nous avons montré au paragraphe « choix de la source » qu'il est nécessaire de considérer des sources à spectres de puissance étalés, le mouvement étant caractérisé non plus par une fréquence caractéristique mais par une durée de vie θ. Ceci correspond à une densité spectrale continue en k et en ω. Plus précisément l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\pi,$$

montre que l'impédance acoustique

$$(<\pi^2><\rho^2>)^{2/2}$$

tend vers zéro avec ω, pour tous les modes à l'exception des modes acoustiques à propagation verticale. L'amplitude des vitesses étant finie, le spectre de puissance des fluctuations de pression doit tendre vers zéro au moins comme ω^2 aux basses fréquences. D'après (49), le spectre de puissance des fluctuations de pression est :

$$(77)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{-i\omega\tau}\, \Phi_{\pi z}(0, \tau) \propto \int_0^\infty dk\, k|f|^2\, F_0(k, \omega).$$

La densité spectrale $F_0(k, \omega)$ doit donc vérifier la relation

$$(78)\quad \lim_{\omega\to 0} F_0(k, \omega) = \omega^2\, g(k).$$

Ce résultat correspond à une propriété importante du champ de pression. En portant (78) dans (77) on obtient l'équation :

$$(79)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, \Phi_{\pi z}(0, \tau) = 0,$$

qui montre que $\Phi_{\pi z}(0, \tau)$ n'est pas partout positive.

Cette relation montre que *d'une façon très générale le champ de pression présente un aspect oscillatoire caractérisé par le changement de signe de l'autocorrélation* $\Phi_{\pi z}(0, \tau)$.

Pour tenir compte de (78), nous représenterons donc une source constituée d'éléments turbulents de taille L et de durée de vie θ par une densité spectrale de la forme

$$(80)\quad F_0(k, \omega) = (\omega\theta)^2 \exp -\frac{1}{2}(k^2 L^2 + \omega^2 \theta^2).$$

On obtient alors la structure de la source en substituant (80) dans (49).

$$(81)\quad \begin{cases} \Phi_{\pi 0}(r, \tau) = \Phi_{\pi 0}(0, 0)\left(1 - \dfrac{\tau^2}{\theta^2}\right) \exp -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r^2}{L^2} + \dfrac{\tau^2}{\theta^2}\right), \\ \Phi_{T0}(r, \tau) = \Phi_{T0}(0, 0) \exp -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r^2}{L^2} + \dfrac{\tau^2}{\theta^2}\right), \\ \Phi_{L0}(r, \tau) = \Phi_{L0}(0, 0)\left(1 - \dfrac{r^2}{L^2}\right) \exp -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r^2}{L^2} + \dfrac{\tau^2}{\theta^2}\right). \end{cases}$$

Ces relations mettent en évidence les caractéristiques générales du mouvement de la source.

La structure temporelle du champ de vitesse verticale dépend, comme sa structure spatiale, de L et de θ d'une façon complexe. La longueur caractéristique de la propagation, équivalente à la longueur d'onde c/ω_0 de la source constituée de pistons, est ici la distance $c\theta$ parcourue par une onde libre pendant une durée de vie des éléments turbulents. On appellera ici *dimension relative* des éléments turbulents le rapport $L/c\theta$.

Si les éléments sont grands ($L \gg c\theta$) la source excite essentiellement des modes acoustiques à propagation presque verticale, et la relation :

$$|\pi| \approx \rho c\, |V|,$$

conduit à :

$$(82) \qquad \begin{cases} \Phi_{V0}(r,\tau) \approx \dfrac{1}{\rho^2 c^2}\, \Phi_{\pi 0}(r,\tau) \\ \text{pour } L \gg c\theta. \end{cases}$$

Si les éléments turbulents sont petits ($L \ll c\theta$), l'excitation est importante dans les modes non acoustiques et dans les ondes obliques et il n'y a plus de proportionnalité entre la pression et la composante verticale de la vitesse. On peut alors dans :

$$\Phi_{V0}(r,\tau) = \frac{2\pi}{\rho^2 c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau} \int_0^{\infty} dk\, k\, J_0(kr)\, |\omega^2 - k^2 c^2|\, \frac{F_0(k,\omega)}{\omega^2},$$

remplacer $|\omega^2 - k^2 c^2|$ par $k^2 c^2$ en négligeant la contribution des modes acoustiques $\omega^2 \gtrsim k^2 c^2$. On obtient alors d'après (49) :

$$\Phi_{V0}(0,\tau) \approx 2\Phi_{T0}(0,\tau),$$

le champ des vitesses verticales a donc le même spectre de puissance que le champ des vitesses transversales. Il est donc dépourvu de tout caractère oscillatoire. Avec la source (80) on a :

$$(83) \qquad \begin{cases} \Phi_{V0}(r,\tau) \approx \Phi_{V0}(0,0) \left(1 - \dfrac{r^2}{L^2}\right) \exp -\frac{1}{2}\left(\dfrac{r^2}{L^2} + \dfrac{\tau^2}{\theta^2}\right), \\ \text{pour } L \ll c\theta. \end{cases}$$

Image à l'infini.

Comme dans le cas de l'excitation par des pistons, la modification de la structure (spatio-temporelle) du mouvement est particulièrement simple à étudier si on considère l'image à grande distance. En effet, à l'infini les modes évanescents sont complètement filtrés : la densité spectrale de l'image est identique à celle de la source pour les modes acoustiques $k_c \leqslant \omega$, et est nulle pour $k_c \geqslant \omega$.

On a donc :

$$(84) \qquad \begin{cases} \Phi_{\pi\infty}(r,\tau) = 2\pi \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau} \int_0^{\left|\frac{\omega}{c}\right|} dk\, k\, J_0(kr)\, F_0(kr), \\ \Phi_{V\infty}(r,\tau) = \dfrac{2\pi}{\rho^2 c^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau} \int_0^{\left|\frac{\omega}{c}\right|} dk\, k \left|1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\right| J_0(kr)\, F_0(kr), \\ \Phi_{T\infty}(r,\tau) = \dfrac{2\pi}{\rho^2 c^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau} \int_0^{\left|\frac{\omega}{c}\right|} dk\, k\, \frac{k^2 c^2}{\omega^2}\, \frac{J_1(kr)}{kr}\, F_0(k,\omega), \\ \Phi_{L\infty}(r,\tau) = \dfrac{2\pi}{\rho^2 c^2} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\omega\tau} \int_0^{\left|\frac{\omega}{c}\right|} dk\, k\, \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \left\{ J_0(kr) - \frac{J_1(kr)}{kr} \right\} F_0(k,\omega) \end{cases}$$

Il n'est pas nécessaire d'étudier la structure *spatiale* définie par (84). Les caractéristiques de cette structure se déduisent simplement du fait qu'une source turbulente est une superposition de source du type « piston » en ce sens que les fonctions d'autocorrélations (84) sont des combinaisons linéaires de solutions du type (67).

Les résultats obtenus dans l'étude d'une excitation par des pistons se transposent immédiatement en remplacement ω_0 par $1/\theta$.

Ils traduisent essentiellement les différences des propriétés cinématiques entre les deux types de modes possibles, et le fait que la largeur relative de la source mesure l'importance des modes évanescents dans le mouvement de la source. Si $L \gg c\theta$, les modes acoustiques dominent et parmi ceux-ci les modes à propagation presque verticale : l'image et la source ont les propriétés caractéristiques des ondes acoustiques à propagation verticale, le filtrage est négligeable.

Si au contraire $L \ll c\theta$, la source a les propriétés caractéristiques des modes évanescents, et l'image à l'infini celle d'une superposition isotrope d'ondes acoustiques. Le filtrage, pour chaque fréquence,

des modes de grand nombre d'onde résulte ici aussi en une image dont la dimension caractéristique de la structure spatiale est élargie par diffraction. La forme précise de l'image dépend de la structure temporelle, donc du spectre de puissance de la source. Mais d'une façon très générale *la dimension caractéristique de l'image diffractée est de l'ordre de* $c\theta$ (voir par exemple Souffrin [33]), soit la distance parcourue par une onde pendant la durée de vie des éléments de la source.

Les propriétés spécifiques de l'image d'une source « turbulente » sont décrites par les *corrélations dans le temps*. Nous allons donc examiner l'effet du filtrage de fréquence sur les fonctions d'autocorrélations temporelles.

L'aspect le plus important de la structure temporelle de l'image à l'infini apparaît immédiatement si on remarque que *les spectres de puissance* de toutes les grandeurs physiques sont de la forme

$$P_\infty(\omega) = \int_0^\omega dk\, g(k, \omega),$$

où $g(k, \omega)$ dépend de la grandeur considérée.

On a donc pour toutes les fluctuations :

$$P_\infty(0) = 0. \tag{85}$$

Tous les spectres de puissance de l'image présentent un maximum, ce qui correspond à un aspect oscillatoire du mouvement. En effet, les fonctions d'autocorrélations vérifient alors :

$$\int_0^\infty \Phi_\infty(0, \tau)\, d\tau = 0, \tag{86}$$

et présentent donc au moins un changement de signe.

Cette propriété est caractéristique de l'effet du filtrage : nous avons vu qu'aux niveaux de la source, seule les fluctuations de pressions possèdent cette propriété.

Le caractère oscillatoire du mouvement est d'autant plus marqué que la largeur du spectre de puissance est plus faible. Il est clair que cette largeur diminue avec la dimension relative $L/c\theta$ des éléments de la source : plus le filtrage est important, plus le spectre de puissance est étroit.

A la limite des éléments infiniment petits, $L/c\theta \to 0$, on peut remplacer dans (49) $F_0(k, \omega)$ par $F_0(0, \omega)$. On obtient alors pour toutes les fluctuations des spectres de puissance identiques et de la forme :

$$P_\infty(\omega) \propto \omega^2 F_0(0, \omega). \tag{87}$$

Si $F_0(o, \omega)$ tend vers zéro suffisamment rapidement pour $\omega\theta > 1$, et en tenant compte de $F_0(0, \omega) \propto \omega^2$ (éq. (78)), on voit que les *spectres de puissance présentent un maximum prononcé pour* $\omega\theta \approx 1$.

On peut illustrer ces résultats quantitativement en considérant la source (80) :

$$F_0(k, \omega) \propto \omega^2 \exp -\frac{1}{2}(\omega^2\theta^2 + k^2 L^2).$$

En portant cette expression dans (84) on obtient les spectres de puissance suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} P_{\pi\infty}(\omega) \propto \omega^2 \left(1 - e^{-\frac{\omega^2 L^2}{2c^2}}\right) e^{-\frac{\omega^2\theta^2}{2}} \\ P_{T\infty}(\omega) = P_{L\infty}(\omega) \\ \qquad \propto \left\{1 - \left(1 + \dfrac{\omega^2 L^2}{2c^2}\right) e^{-\frac{\omega^2 L^2}{2c^2}}\right\} e^{-\frac{\omega^2\theta^2}{2}} \\ P_{V\infty}(\omega) \propto \left(\dfrac{\omega^2 L^2}{2c^2} - 1 + e^{-\frac{\omega^2 L^2}{2c^2}}\right) e^{-\frac{\omega^2\theta^2}{2}}. \end{array}\right. \tag{88}$$

Pour $L \ll c\theta$, on obtient pour tous les spectres de puissance :

$$P_\infty(\omega) \propto \omega^4 e^{-\frac{\omega^2\theta^2}{2}}. \tag{89}$$

Toutes les fonctions d'autocorrélations temporelles sont alors de la forme :

$$\Phi_\infty(0, \tau) \propto \left(1 - 2\frac{\tau^2}{\theta^2} + \frac{1}{3}\frac{\tau^4}{\theta^4}\right) e^{\frac{2\theta^2}{\tau^2}} \tag{90}$$

La figure 5 illustre la relation (90).

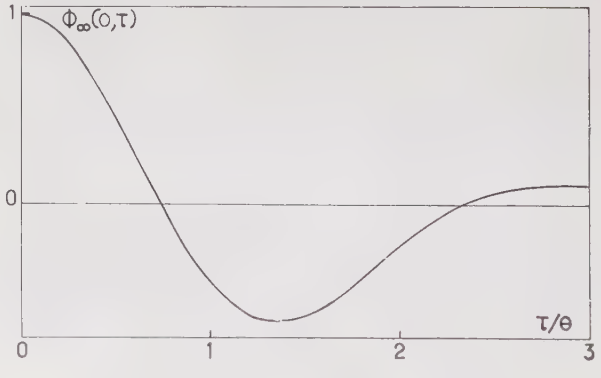

Fig. 5. — Fonction d'autocorrélation temporelle du mouvement à l'infini dans un fluide homogène excité par des éléments turbulents de durée de vie θ et de dimension $L \ll c\theta$.

L'étude de la réponse du fluide homogène nous a permis de montrer certaines propriétés importantes du mouvement.

Nous avons vu que si la turbulence est caractérisée par des éléments de durée de vie θ et de dimension $L \ll c\theta$, le mouvement lointain est pseudo-périodique de pseudo-période de l'ordre de θ^{-1} et

est constitué d'éléments de dimension de l'ordre de $c\theta$.

Le mouvement du fluide homogène peut donc présenter les propriétés qualitatives du mouvement observé dans l'atmosphère solaire : augmentation des dimensions caractéristiques du mouvement avec la distance à la zone convective, et aspect oscillatoire des fonctions d'autocorrélation temporelle. On voit que cette dernière propriété, en particulier, n'est pas caractéristique *a priori* d'une résonance de l'atmosphère. Enfin, l'importance d'une formulation du problème tenant compte de la structure horizontale du mouvement apparaît clairement.

III. Étude de l'influence de la relaxation radiative des températures sur la réponse du fluide homogène.

Nous allons maintenant considérer le rôle du rayonnement de la façon décrite au paragraphe « Équation d'énergie ». L'équation (30) :

$$Q = -\frac{\gamma c^2}{\tau_R}\frac{\delta T}{T},$$

introduit un paramètre supplémentaire pour la description des propriétés intrinsèques du fluide : *le temps de relaxation* τ_R. Le fluide dissipatif possède donc un temps caractéristique : τ_R, et une longueur caractéristique : $c\tau_R$. L'excitation par une source étendue ne peut plus être définie par la seule largeur relative $L/c\theta$ ou $L\omega/c$ de ses éléments, mais dépend de *deux paramètres indépendants* : $L/c\tau_R$ et θ/τ_R. Il en résulte une complication formelle considérable du problème traité au chapitre précédent.

Cependant nous, avons vu qu'en l'absence de dissipation, les modes simples correspondant à des perturbations de la forme :

$$X(x, y, ,z\, t) \propto \exp i(\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r} + \omega t) \quad \text{en} \quad z = 0,$$

se classent en deux catégories et que les propriétés de la réponse du fluide homogène s'expliquent simplement en termes des propriétés de ces deux catégories.

Nous allons donc étudier de façon détaillée les propriétés des modes simples dans un fluide dissipatif.

Les équations linéarisées du mouvement s'écrivent ici :

$$(91)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \pi}{\partial t} - c^2\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = -\rho(\gamma - 1)\dfrac{\gamma c^2}{\tau_R}\left(\dfrac{\pi}{p} - \dfrac{\sigma}{\rho}\right) \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla\pi \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = -\rho\nabla.\boldsymbol{v}. \end{cases}$$

Par élimination, on obtient l'équation de propagation des perturbations :

$$(92)\quad \left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right)\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma - 1}{\tau_R}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\gamma}\nabla^2\right)\right\} X(x, y, z, t) = 0.$$

Pour un mode simple l'équation (92) devient :

$$(93)\quad \left\{i\omega\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{d^2}{dz^2}\right) + \frac{1}{\tau_R}\left(k^2 - \frac{\gamma\omega^2}{c^2} - \frac{d^2}{dz^2}\right)\right\} X(x, y, z, t) = 0.$$

Cette équation est la forme explicite de l'équation (13) correspondant au problème.

Cherchons une solution de (93) sous la forme :

$$(94)\quad \begin{cases} X(x, y, z, t) \propto \exp i[\omega t + k.r + z(\varphi + i\lambda)], \\ z \geqslant 0, \end{cases}$$

où φ et λ sont réels.

En posant :

$$(95)\qquad a + i = (\varphi + i\lambda)^2,$$

et en substituant (94) dans (93) on obtient :

$$(96)\quad \begin{cases} a(c\tau_R)^2 = (\omega\tau_R)^2\dfrac{(\omega\tau_R)^2 + \gamma}{(\omega\tau_R)^2 + 1} - k^2(c\tau_R)^2, \\ b(c\tau_R)^2 = (1 - \gamma)\dfrac{(\omega\tau_R)^3}{1 + (\omega\tau_R)^2} \end{cases}$$

Pour k et ω fixés, (96) détermine a et b, donc $\varphi + i\lambda$ *au signe près*. On retrouve, au même niveau, la même indétermination que dans le cas du fluide non radiatif, mais la situation physique est beaucoup plus simple. En effet, il n'y a pas ici de modes strictement stationnaires en ce sens que toute oscillation, entraînant une certaine dissipation de l'énergie mécanique, ne peut être entretenue que par l'apport d'énergie *à partir* de la source.

Mathématiquement, (96) montre que :

(97) $\omega\lambda\varphi < 0$ quelque soient k, ω,

donc qu'à tout mode est associé un flux de l'énergie acoustique suivant $0z$. Il suffit alors pour déterminer entièrement $\varphi + i\lambda$ de choisir la détermination de $(a + ib)^{1/2}$ telle que le mode (94) rayonne de l'énergie *à partir* de la source, soit telle que :

$$\omega\varphi < 0.$$

Portant cette condition de rayonnement dans (97) on obtient :

(98) $\lambda > 0$ quelque soient k, ω,

ce qui exprime que pour tous les modes les solutions (94) sont amorties. L'intérêt de ce résultat réside dans le fait que les solutions du système (91) ne s'interprètent pas seulement en termes d'ondes progressives amorties par dissipation radiative, mais aussi en terme d'oscillation quasi-stationnaires. L'équation (98) montre que, seules, les ondes quasi-stationnaires « évanescentes » sont entretenues et correspondent à des solutions physiques. On a ainsi démontré de façon très simple le caractère évanescent des ondes stationnaires lorsque la dissipation est négligeable, (98) restant valable pour $\tau_R \to 0$ et $\tau_R \to \infty$, alors que cette démonstration devient beaucoup plus complexe si on considère le fluide comme strictement non dissipatif (Lamb [16]).

Remarques sur les approximations « isotherme » et « adiabatique ».

Il convient ici d'examiner plus en détail le sens des limites $\tau_R \to 0$ et $\tau_R \to \infty$.

Si on fait $\tau_R = 0$ dans (92), on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{c^2}{\gamma}\nabla^2\right) X(x, y, z, t) = 0,$$

c'est-à-dire l'approximation des perturbations « isothermes » [1].

Si on fait $\tau_R = \infty$ dans (92), on obtient :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2\nabla^2\right) X(x, y, z, t) = 0,$$

c'est-à-dire l'approximation des perturbations « adiabatiques ».

Il est généralement admis que ces deux approximations sont représentatives de la propagation d'ondes respectivement de basses fréquences ($\omega\tau_R \ll 1$) et de hautes fréquences ($\omega\tau_R \gg l$) dans un fluide où le temps de relaxation τ_R est fini. Qu'il n'en soit pas ainsi résulte immédiatement du fait que (96) ne dépend pas de ω et de τ_R uniquement sous la forme du produit $\omega\tau_R$. En particulier les limites :

$$\begin{cases} b \to \infty & \text{pour} \quad \omega \to \infty, \\ b \to 0 & \text{pour} \quad \tau_R \to \infty, \end{cases}$$

montrent clairement que *l'approximation adiabatique ne représente pas correctement les ondes de hautes fréquences*, même dans le problème à une dimension ($k = 0$).

L'origine de la confusion semble être une interprétation erronée de l'article fondamental de Stokes [39]. Le but de Stokes était d'estimer τ_R dans les conditions *expérimentales* de mesure de la vitesse du son, praticables à l'époque, c'est-à-dire pour des fréquences de l'ordre de 10^{-4}. Dans ces conditions la longueur d'onde est une unité naturelle de longueur, et Stokes discute en fait l'amortissement *par longueur d'onde* et la vitesse de phase, soit avec nos notations ω/λ et ω/φ. On vérifie en effet que dans le cas étudié par Stokes ($k = 0$), (96) exprime λ/ω et φ/ω en fonction du produit $\omega\tau_R$ seulement. Mais il est clair que pour étudier la propagation des hautes fréquences dans un fluide dissipatif il faut considérer la dissipation sur une distance fixe lorsque $\omega \to \infty$, et non sur la longueur d'onde qui tend elle-même vers zéro.

Stokes considère le modèle physique suivant : une masse d'air est contenue dans un cylindre fermé par un piston mobile sans frottement sur la surface externe duquel s'exerce une pression atmosphérique constante, les échanges thermiques entre la masse d'air et l'atmosphère extérieure se faisant par *rayonnement* d'un flux d'énergie proportionnel à leur différence de température. Examinant de façon détaillée le mouvement oscillatoire du piston, Stokes montre que le piston doit fournir du travail aussi bien dans un demi-cycle de compression que dans un demi-cycle d'expansion, éclairant ainsi le caractère dissipatif de la relaxation des températures. Dans le cas d'une oscillation très rapide, Stokes montre que le travail du piston devient négligeable du fait que la masse d'air se transforme presque adiabatiquement, l'échange de chaleur pendant un cycle étant très faible. Mais il est essentiel dans le raisonnement de considérer l'air contenu dans le cylindre comme approximativement homogène au cours des transformations, c'est-à-dire, en fait, que le cylindre ait une longueur petite devant la longueur d'onde des perturbations acoustiques engendrées par le piston. Le raisonnement s'applique donc à une masse de gaz d'autant plus petite que la fréquence est plus grande. Pour un cylindre de

[1] Pour l'étude axiomatique des problèmes posés par l'abaissement de l'ordre de l'équation (92) voir J. Chaillou, 1966, *Cahiers de Touraine* n° 1.

longueur l, la discussion précédente n'est pas valable pour des fréquences supérieures à c/l : elle montre seulement que la *dissipation par longueur d'onde* tend vers zéro lorsque $\omega \to \infty$, mais ne permet aucune conclusion sur la dissipation des ondes de haute fréquence sur une longueur *donnée*. Comme nous l'avons indiqué, Stokes étudiant le problème de l'amortissement à une fréquence déterminée, considère implicitement la longueur d'onde comme unité de longueur ; il emploie donc le terme « dissipation négligeable » dans le sens de « dissipation *par longueur d'onde* négligeable ». Cet abus de langage a conduit certains auteurs à conclure du modèle simple présenté par Stokes que les ondes de hautes fréquences se propagent sans amortissement. En fait, cette conclusion est en contradiction avec l'analyse mathématique développée par Stokes dans le même article. On peut montrer facilement que pour $k = 0$ la solution (96) est identique à celle de Stokes. Cette solution décrit « l'onde progressive plane amortie », qui représente par rapport à la solution du cas général ($k \neq 0$) le même caractère fondamental que l'onde plane dans le fluide non dissipatif. Nous allons donc en examiner rapidement les propriétés caractéristiques.

L'onde progressive plane amortie. ($k = 0$).

La solution (96) s'écrit pour $k = 0$:

$$(99)\quad \begin{cases} \varphi + i\lambda = \dfrac{1}{c\tau_R} \dfrac{\omega\tau_R}{\sqrt{1 + (\omega T_R)^2}} \\ \qquad \left\{ \gamma + (\omega\tau_R)^2 - i(\gamma - 1)\,\omega\tau_R \right\}^{1/2}. \\ \lambda > 0. \end{cases}$$

a) *Oscillations des hautes fréquences.*

En limitant le développement de (99) en série de puissances de $(\omega\tau_R)^{-1}$ aux premiers termes, on obtient :

$$\varphi + i\lambda \approx -\frac{\omega}{c} + i\,\frac{\gamma - 1}{2c\tau_R}.$$

Les perturbations sont donc de la forme :

$$(100)\quad X(x, y, z, t) \propto \exp i\omega \left(t - \frac{z}{c}\right) \times \exp -\frac{\gamma - 1}{2}\,\frac{z}{c\tau_R}.$$

Il y a donc propagation avec la « vitesse adiabatique » du son c, mais *avec amortissement spatial.* L'échelle de hauteur de l'amortissement est de l'ordre de la distance parcourue par le son pendant le temps de relaxation des températures. Cette distance étant très grande comparée à la longueur d'onde, l'onde se comporte *localement* comme une perturbation adiabatique. L'amortissement n'en distingue pas moins fondamentalement une telle onde d'une perturbation adiabatique.

b) *Oscillations de basses fréquences.*

De la même façon, en développant (99) en puissances de $\omega\tau_R$ on obtient :

$$(101)\quad X(x, y, z, t) \propto \exp\left[i\omega\left(t - \frac{\sqrt{\gamma}}{c}\,z\right)\right] \exp\left[-\frac{\gamma - 1}{2\sqrt{\gamma}}\,(\omega\tau_R)^2\,\frac{z}{c\tau_R}\right].$$

Il y a propagation avec la « vitesse isotherme » du son $c/\sqrt{\gamma}$. L'échelle de hauteur de l'amortissement tend vers l'infini avec la longueur d'onde. A l'opposé du cas précédent, pour toute expérience portant sur une distance finie, l'amortissement est effectivement négligeable pour les fréquences suffisamment basses.

c) La figure 6 illustre la solution de (99) pour les fréquences de l'ordre de τ_R^{-1}. Du point de vue considéré ici, le caractère essentiel de cette solution est la décroissance monotone de l'échelle de hauteur de l'amortissement en fonction de la fréquence.

Cas général, $k \neq 0$. Généralisation du diagramme diagnostique.

Dans le cas général d'une source plane turbulente, le mouvement est évidemment une superposition de modes normaux décrit par un spectre de (k, ω). Les équations (96) et (98) permettent de calculer l'amortissement λ et le nombre d'onde vertical φ pour un mode (k, ω) quelconque.

Dans le cas du fluide non dissipatif, les modes normaux se classent en deux catégories : les ondes

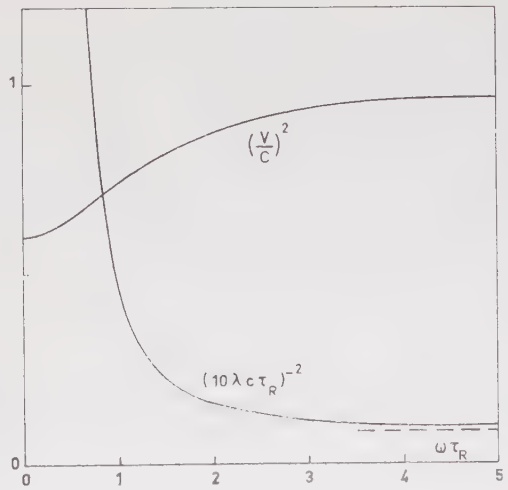

FIG. 6. — Vitesse de phase et amortissement d'une onde plane dans un fluide homogène radiatif

planes progressives $\lambda = 0$, $\varphi \neq 0$, et les oscillations stationnaires évanescentes $\varphi = 0$, $\lambda \neq 0$, et le diagramme diagnostique est la partition du plan (k, ω) en ces deux catégories. Cette partition n'est pas possible en présence de dissipation puisque $\lambda\varphi \neq 0$ quelque soient k et ω.

La généralisation naturelle du diagramme diagnostique consiste alors à caractériser les solution par le rapport $\lambda/|\varphi|$, c'est-à-dire par l'amortissement par longueur d'onde *verticale*.

D'après (95) :

$$a = \varphi^2 - \lambda^2.$$

Nous définirons donc le diagramme diagnostique comme la division du plan (k, ω) d'après le signe de $a(k, \omega)$. Nous appellerons les modes du domaine $a > 0$ (soit $\lambda < |\varphi|$) « modes acoustiques modifiés » ou « ondes progressives amorties », et les modes du domaine $a < 0$ (soit $\lambda > |\varphi|$) « modes évanescents modifiés » ou « oscillations quasi-stationnaires évanescentes ». La limite entre les deux domaines est définie par :

$$a(k_c, \omega) = 0,$$

soit d'après (96) :

$$k_c^2 = \frac{(\omega\tau_R)^2 + \gamma\,\omega^2}{(\omega\tau_R)^2 + 1\;c^2}. \tag{102}$$

Pour $\tau_R \to \infty$, on retrouve le diagramme diagnostique :

$$k_c^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

de l'approximation « adiabatique », et pour $\tau_R = 0$ on obtient le diagramme diagnostique :

$$k_c^2 = \gamma\omega^2/c^2,$$

de l'approximation « isotherme ».

Ce rapport entre l'échelle de hauteur de l'amortissement et la longueur d'onde verticale, sur lequel nous avons basé la distinction en deux types de modes n'est pas suffisant en soi pour caractériser la nature physique du mouvement. La classification proposée est justifiée par le fait que les principales caractéristiques locales du mouvement sont également déterminées par le rapport $|\varphi|/\lambda$.

Le déphasage vitesse verticale-pression est une caractéristique particulièrement importante du fait que d'après (28) *seule la composante de la vitesse verticale en phase avec la pression contribue au flux d'énergie*. Or en substituant (94) dans l'équation du mouvement (91) on obtient :

$$V_z = -\frac{\varphi}{\rho\omega}\left(1 + i\,\frac{\lambda}{\varphi}\right)\pi. \tag{103}$$

On voit que le déphasage est compris entre 0 et $-\frac{\pi}{4}$ si $\lambda < |\varphi|$, et entre $-\pi/4$ et $-\pi/2$ si $\lambda > |\varphi|$. On peut donc considérer les oscillations pour lesquelles $a > 0$ comme des oscillations avec pression et vitesse verticale en phase *modifiées* par la dissipation. De même on est conduit à considérer les solutions $a < 0$ comme des oscillations avec pression et vitesse verticale en quadrature *modifiées*.

A partir de (95) et (96), on peut montrer que les courbes d'égale valeur du rapport $\lambda/|\varphi|$ donc d'égal déphasage pression-vitesse verticale sont données par l'équation :

$$(k c\tau_R)^2 = \frac{(\gamma - 1)\,\omega\tau_R\,\dfrac{1 - r^2}{2r} + (\omega\tau_R)^2 + \gamma}{1 + 1/(\omega\tau_R)^2}, \tag{104}$$

où

$$r = |\varphi|/\lambda.$$

La figure 7 montre la répartition des iso-r dans le plan (k, ω). On voit que la différence de phase varie rapidement au voisinage de la courbe $r = 1$ définissant le diagramme diagnostique.

Les caractéristiques cinématiques du champ de vitesse permettent également de distinguer physiquement les modes des deux domaines du diagramme diagnostique. En effet, en éliminant la pression dans l'équation (91), on obtient entre les composantes horizontales et verticales d'un mode normal la relation :

$$V_z = \frac{\varphi}{k^2}\left(1 + i\,\frac{\lambda}{\varphi}\right)\boldsymbol{k}.\boldsymbol{v}_\perp. \tag{105}$$

L'hodographe des vitesses est une ellipse. Pour $\lambda \ll |\varphi|$ cette ellipse est très applatie sur le grand axe, et celui-ci est presque perpendiculaire aux plans équiphase, ce qui peut être considéré comme une onde purement longitudinale modifiée par la dissipation. Pour $\lambda \gg |\varphi|$ (105) montre que le rapport des axes est voisin de l'unité, ce qui peut se décrire comme une oscillation à champ de vitesse polarisé circulairement modifiée par la dissipation.

La transition continue entre les deux types de champs de vitesse se fait évidemment au voisinage de $a(k, \omega) = 0$.

Les propriétés que nous venons d'étudier donnent une base physique à notre classification des modes normaux en deux catégories, mais on voit également que la validité de cette distinction s'efface au voisinage de la courbe $a = 0$ du diagramme diagnostique, la transition entre les deux catégories étant continue en k et ω. Il en résulte clairement que *cette zone de transition* $a(k, \omega) \approx 0$ *est la région du*

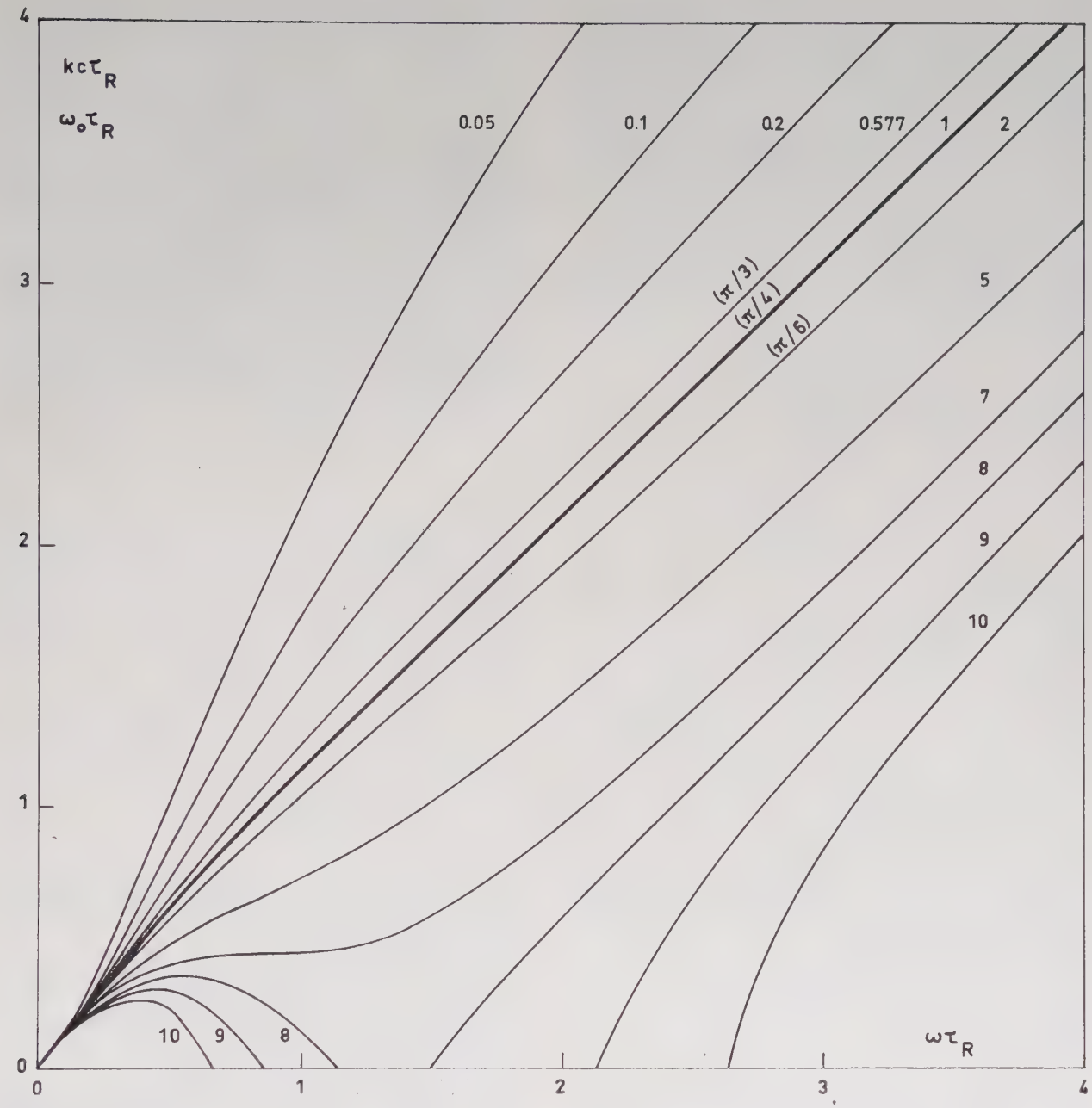

FIG. 7. — Amortissement par longueur d'onde verticale dans un fluide homogène radiatif ($kc\tau_R$ en ordonnées) et dans une atmosphère isotherme radiative ($\omega_0 \tau_R$ en ordonnées). Les courbes sont indexées par la valeur de $|\varphi|/\lambda$. Les nombres entre parenthèses donnent le déphasage vitesse verticale-pression dans le fluide homogène, dont le diagramme diagnostique est défini par la courbe $|\varphi|/\lambda = 1$.

diagramme diagnostique où les solutions sont le plus perturbées par la dissipation. L'importance théorique de ce point est notable du fait qu'en l'absence de dissipation la limite entre les zones « ondes progressives » et « oscillations stationnaires » correspond à des solutions singulières du point de vue dynamique, exactement comme les oscillations horizontales d'une atmosphère isotherme à la fréquence de coupure (LAMB [16]).

Facteur de transmission du fluide homogène dissipatif.

Tous les modes étant amortis, l'amplitude des perturbations tend vers zéro quand on s'éloigne de la source. La considération de l'image à l'infini n'a donc aucun intérêt, ce qui rend l'étude du problème du filtrage plus complexe qu'en l'absence de dissipation.

Cependant la nature physique de l'amortissement est différente dans les deux régions définies par le diagramme diagnostique, et il en résulte une différence d'ordre de grandeur des échelles hauteur de l'amortissement pour les deux types de modes. Nous allons examiner cet effet en explicitant la solution (95), (96) pour les modes de hautes fréquences.

Cas des hautes fréquences.

Pour $\omega\tau_R \gg 1$, et à l'*extérieur* d'un voisinage de la limite $a = 0$ entre les deux types de modes défini par :

$$\left| 1 - \frac{k^2 c^2}{\omega^2} \right| \lesssim \frac{\gamma - 1}{(\omega\tau_R)^2}, \tag{106}$$

on peut écrire (96) sous la forme :

$$\begin{cases} a \approx \dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2, \\ b \approx (1-\gamma)\dfrac{\omega\tau_R}{(c\tau_R)^2}. \end{cases} \tag{107}$$

Soit d'après (95) :

$$\varphi + i\lambda \approx \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)^{1/2} \left[1 + i\frac{1-\gamma}{c^2\tau_R}\frac{\omega}{\dfrac{\omega^2}{c^2} - k^2}\right]^{1/2}. \tag{108}$$

Pour un mode acoustique :

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0,$$

et la détermination de (108) vérifiant la condition de rayonnement (98) s'écrit.

$$\begin{cases} \varphi \approx -\dfrac{\omega}{c}\sqrt{1 - \dfrac{k^2 c^2}{\omega^2}}, \\ \lambda \approx \dfrac{\gamma - 1}{2}\left(c\tau_R\sqrt{1 - \dfrac{k^2 c^2}{\omega^2}}\right)^{-1}, \end{cases} \tag{109}$$

l'interprétation géométrique de ce résultat est simple. En effet, nous avons vu que pour l'onde progressive plane ($k = 0$) amortie de haute fréquence, on a :

$$\begin{cases} \varphi_0 \approx -\dfrac{\omega}{c}, \\ \lambda_0 \approx \dfrac{\gamma - 1}{2}\dfrac{1}{c\tau_R}. \end{cases}$$

et les plans équiphases du mode (k, ω) font avec le plan de la source l'angle α tel que :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{k^2}{\varphi^2}.$$

On peut donc écrire (109) sous la forme :

$$\begin{cases} \varphi \approx \varphi_0 \cos\alpha, \\ \lambda \approx \lambda_0/\cos\alpha. \end{cases} \tag{110}$$

La solution (109) est donc simplement une onde progressive plane amortie inclinée de l'angle α sur le plan de la source. La longueur d'onde verticale et l'échelle de hauteur de l'amortissement ne diffèrent de celles de l'onde plane que par un facteur purement géométrique rendant compte de l'inclinaison de l'onde, l'amortissement se mesurant non plus dans la direction de propagation, mais perpendiculairement au plan de la source.

En écrivant d'après (106) la condition de validité de ce résultat sous la forme :

$$\cos^2\alpha \gg \frac{\gamma - 1}{(\omega\tau_R)^2},$$

on voit que *les modes k, ω ne peuvent être interprétés comme des ondes progressives amorties obliques que si l'inclinaison des surfaces équiphases n'est pas trop grande.*

Pour un mode quasi stationnaire $a < 0$, la solution de (108) vérifiant (109) s'écrit :

$$\begin{cases} \varphi \approx -\dfrac{\gamma - 1}{2}\left(c\tau_R\sqrt{\dfrac{c^2 k^2}{\omega^2} - 1}\right)^{-1}, \\ \lambda \approx \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{k^2 c^2}{\omega^2} - 1}. \end{cases} \tag{111}$$

L'amortissement est, au premier ordre en $(\omega\tau_R)^{-1}$, égal à celui obtenu pour les ondes évanescentes en l'absence de dissipation.

Les modes (111) sont amortis sur une distance de l'ordre de c/ω, alors que les modes (109) ne sont amortis que sur une distance de l'ordre de $c\tau_R$.

Le filtrage des modes de hautes fréquences se fait donc en deux étapes distinctes :

1° filtrage des modes évanescents modifiés. L'échelle de hauteur de cet amortissement est c/ω. La structure du mouvement tend pour $\dfrac{c}{\omega} \ll z < c\tau_R$ vers l'image à l'infini étudiée en l'absence de dissipation.

2° filtrage de cette image par dissipation des modes acoustiques, avec l'échelle de hauteur $c\tau_R$, la structure horizontale s'élargissant du fait de la disparition plus rapide des ondes les plus verticales.

L'analyse du filtrage développée au chapitre précédent s'applique donc au cas du fluide dissipatif si le temps θ caractéristique de la source (durée de vie ou période) est petit devant le temps de

relaxation τ_R, pour décrire la première étape du filtrage.

L'image à l'infini calculée au chapitre précédent donne l'état de mouvement pour :

$$c\theta \ll z < c\tau_R.$$

La relation (107) n'est valable qu'à l'extérieur du voisinage (106) de la frontière :

$$a(k, \omega) = 0,$$

entre les deux types de modes. Aux très hautes fréquences, ce voisinage est assez étroit pour être négligeable dans le calcul du filtrage. Il convient de remarquer que dans ce domaine du diagramme diagnostique, les modes ne peuvent être considérés ni comme des ondes amorties obliques du type (110) ni comme des modes évanescents du type (111).

Cas général.

Une étude identique montre que pour les très basses fréquences le filtrage s'effectue également en deux phases, la première indépendante de la

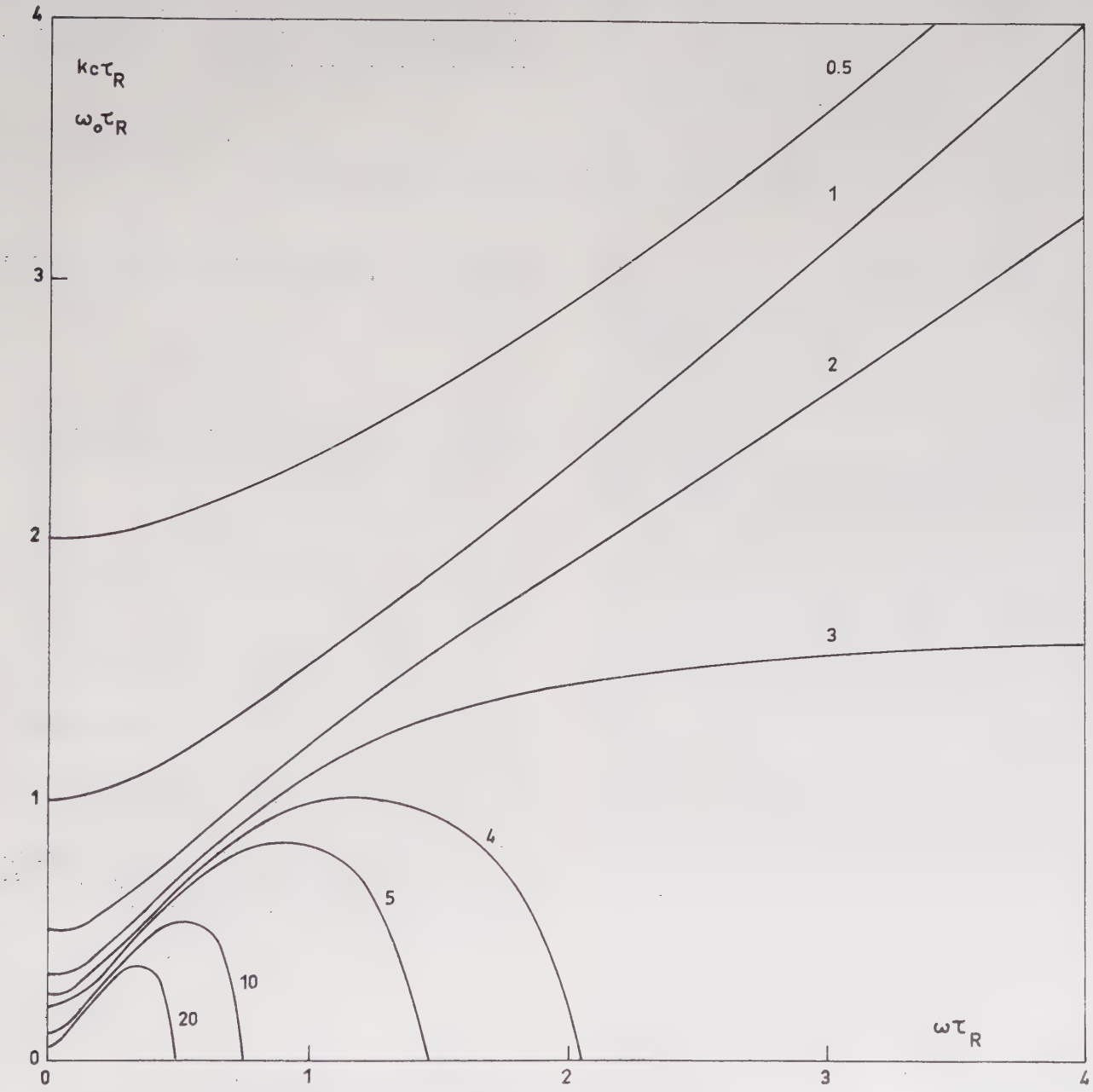

FIG. 8. — Échelle de hauteur de l'amortissement vertical.
Les ordonnées ont le même sens que dans la figure 7. Les courbes sont indexées par la valeur de $(\lambda c\tau_R)^{-1}$.

dissipation (conduisant à une image réfractée), la seconde due à la dissipation.

Dans le cas où une partie importante de l'énergie de la source est distribuée dans des modes de fréquences de l'ordre de τ^{-1}, les deux phases du filtrage sont simultanées. Le calcul du filtrage nécessite la résolution explicite du système (95), (96). La figure 8 donne les lignes d'égal amortissement λ dans le plan $(kc\tau_R, \omega\tau_R)$, définies par :

$$(112)\quad (kc\tau_R)^2 = (\omega\tau_R)^2 \left[\frac{(\omega\tau_R)^2+\gamma}{(\omega\tau_R)^2+1} - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^2 \frac{r^2(\omega\tau_R)^4}{(1+(\omega\tau_R)^2)^2}\right] + \frac{1}{r^2}.$$

où :

$$r^2 = (\lambda c\tau_R)^{-1}.$$

Les figures 7 et 8 illustrant les équations (104) et (112) permettent une détermination approchée rapide de λ et φ aux fréquences où les approximations $\omega\tau_R \gg 1$ ou $\omega\tau_R \ll 1$ ne sont pas utilisables. La figure 8 montre que le filtrage *par dissipation* entraîne une modification de la structure spatio-temporelle du mouvement différente de celle examinée précédemment. Nous verrons que le problème de la propagation dans un fluide homogène dissipatif avec des conditions aux limites *harmoniques* (c'est-à-dire pour $F_0(k, \omega) \propto \delta(k - k_0)$) est formellement identique à celui de la propagation d'une onde plane *horizontale* dans une atmosphère *isotherme* dissipative. Les figures 7 et 8 illustrent donc également ce dernier problème.

IV. Étude de l'atmosphère isotherme radiative

Modèle phénoménologique.

Dans le cas du fluide homogène compressible étudié dans le chapitre précédent, le couplage entre les différents éléments du fluide, responsable de la propagation des perturbations, est dû aux seules fluctuations de pressions, donc uniquement à la compressibilité. Il est bien connu que dans une atmosphère stratifiée par un champ de gravitation, la force d'Archimède introduit un couplage supplémentaire.

A ce couplage est associé un type d'onde notablement différent par les propriétés cinématiques des ondes acoustiques : les ondes de gravité. Les ondes de surface observées dans les liquides en sont un cas particulier. Il est clair, d'après la nature de l'oscillation, que les ondes de gravité sont une conséquence de la stabilité de la stratification de l'atmosphère, la force d'Archimède s'annulant à la limite de l'instabilité.

Nous allons montrer que la stabilité n'est cependant pas une condition suffisante d'existence d'ondes de gravité du fait de l'amortissement thermodynamique des fluctuations de température.

Reprenant le modèle phénoménologique classique, considérons un élément homogène de fluide isolé par une membrane élastique optiquement mince. Désignons par p, ρ, T la pression, la densité et la température de l'atmosphère à l'altitude z, par p^*, ρ^* et T* les grandeurs correspondantes dans le globule. Supposons qu'à l'instant initial le globule se trouve à l'altitude $z = z_0$ avec une densité légèrement différente de la densité locale ρ_0 de l'atmosphère. Désignons par g l'accélération de la pesanteur, par H l'échelle de hauteur locale de la densité, soit :

$$(113)\qquad H = -\left(\frac{d\log\rho}{dz}\right)^{-1},$$

et par ξ le déplacement du globule, mesuré à partir de z_0.

L'équation du mouvement du globule :

$$\rho^* \frac{d^2\xi}{dt^2} = g(\rho - \rho^*),$$

s'écrit alors en négligeant les termes du second ordre :

$$(114)\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -g\left(\frac{\xi}{H} + \frac{\rho^* - \rho_0}{\rho_0}\right).$$

Pour éliminer ρ^* il faut introduire l'équation d'énergie

$$dp^* - \frac{p^*\gamma}{\rho^*} d\rho^* - \rho^*(\gamma - 1)\, dQ = 0.$$

Si le globule est optiquement mince, son refroidissement radiatif peut être décrit par la loi de Newton que nous écrirons sous la forme :

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{c_v}{T_R}(T^* - T).$$

En utilisant l'équation d'état du gaz parfait, et la relation :

$$c^2 = \frac{3}{2}\gamma T c_v,$$

entre la vitesse adiabatique du son c et la chaleur spécifique c_v et en admettant que le globule constamment en équilibre de pression avec l'atmosphère, l'équation d'énergie peut s'écrire au premier ordre :

$$(115)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho^* - \rho_0}{\rho_0}\right) = -\frac{g}{c^2}\frac{d\xi}{dt} - \frac{3}{2}\frac{\gamma - 1}{\gamma T_R}\left(\frac{\rho^* - \rho_0}{\rho_0} - \frac{\xi}{H}\right).$$

En éliminant ρ^* entre (114) et (115), on obtient pour la vitesse :

$$v = \frac{d\xi}{dt},$$

du globule l'équation :

$$(116)\quad \frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{3}{2}\frac{\gamma - 1}{\gamma T_R}\frac{dv}{dt} + N^2 v = 0,$$

où N est la fréquence de Vaïsälä locale :

$$N^2 = \frac{g}{H} - \frac{g^2}{c^2}.$$

Le mouvement du globule tend ou non vers une position d'équilibre suivant que N^2 est positif ou négatif. C'est ce qu'exprime le critère de Schwarzschild.

Dans la suite nous ne considèrerons que des domaines stables d'une atmosphère. Nous supposerons donc que $N^2 > 0$.

Pour $T_R \to \infty$ c'est-à-dire à l'approximation adiabatique, le globule a un mouvement oscillatoire avec la fréquence de Vaïsälä locale.

Pour $T_R = 0$ le globule est constamment en équilibre de température et de pression avec l'atmosphère ambiante ; il est donc en équilibre indifférent, bien que l'atmosphère ne soit pas marginalement stable, puisque le mouvement ne peut être rendu instable par une petite perturbation des paramètres. La stabilité marginale est définie par $N^2 = 0$, indépendamment de T_R.

L'intérêt de l'équation de mouvement (116) est de montrer que *même dans une atmosphère localement stable*, c'est-à-dire où $N^2 > 0$ le mouvement du globule n'a de caractère oscillatoire que si

$$(117)\quad T_R > \frac{3}{4}\frac{\gamma - 1}{\gamma} N^{-1}.$$

L'existence des ondes de gravité résultant des oscillations dues à la force d'Archimède, on peut déduire de l'analyse précédente le résultat qualitatif suivant :

— dans une atmosphère stable (et non simplement marginalement stable) la propagation d'ondes de gravité n'est possible que si le temps de relaxation des fluctuations des températures est suffisamment grand.

La valeur limite $T_R = \frac{3}{4}\frac{\gamma - 1}{\gamma} N^{-1}$ trouvée ci-dessus comme condition d'existence d'oscillation est évidemment liée au modèle phénoménologique utilisé, et ne saurait être considérée comme déterminant la condition d'existence des ondes de gravité dans une atmosphère stratifiée.

Une telle condition ne peut être obtenue que par une étude hydrodynamique. L'étude précédente montre qu'il est nécessaire de représenter explicitement dans l'équation d'énergie la relaxation des températures. Se contenter de traiter l'approximation adiabatique ($T_R = \infty$) et d'introduire une valeur « efficace » de γ comprise entre 1 et c_p/c_v pour tenir compte de la relaxation conduit à des résultats erronés, non seulement pour l'estimation de la dissipation, comme nous l'avons vu au chapitre III, mais également quant à la nature physique du mouvement.

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'effet de la stratification d'une atmosphère sur le filtrage du mouvement d'une source turbulente sous-jacente de la façon exposée au chapitre I. En général, la stratification de la structure entraîne une variation de la vitesse locale du son avec l'altitude, d'où une déformation des fronts d'ondes au cours de la propagation, et éventuellement des réflexions. Si le cas général présente un intérêt considérable, il dépasse le cadre de cette étude qui conserve un caractère préliminaire. Le cas particulier de l'atmosphère compressible isotherme présente l'intérêt d'être, du point de vue de la propagation du son, homogène sans être isotrope : les ondes planes se propagent sans déformation comme dans le fluide homogène, mais avec dispersion. Son étude permet donc d'étudier les effets de l'anisotropie sur la propagation à l'exclusion des phénomènes de reflexions, d'où il résulte une grande simplification formelle des problèmes hydrodynamiques. Nous nous limiterons donc dans ce chapitre à l'étude d'une atmosphère isotherme. Les propriétés cinématiques des ondes acoustiques et des ondes de gravité en l'absence de dissipation sont examinées en détail dans le très important traité de Eckart [8]. Nous concentrerons donc notre attention sur le rôle de la relaxation radiative et sur le phénomène de filtrage.

Traitement hydrodynamique.

Avec les notations définies précédemment, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}\pi - g\,\dfrac{\sigma}{\rho}\,\boldsymbol{\lambda}, \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial t} = -\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho \boldsymbol{v}), \\ \dfrac{\partial \pi}{dt} - g\rho v_z = c^2\left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial t} - \dfrac{\rho v_z}{\mathrm{H}}\right) - \dfrac{3}{2}\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{\rho c^2}{\mathrm{T_R}}\left(\dfrac{\pi}{p} - \dfrac{\sigma}{\rho}\right), \end{cases}$$

où $\boldsymbol{\lambda} = (0, 0, 1)$ et où on a utilisé l'équation d'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dp}{dz} = -\,g,$$

et la définition (113) de l'échelle de hauteur.

Par le changement de variables

$$(118) \qquad \begin{cases} \mathrm{U} = \sqrt{\rho}\, c v_z, \\ \mathrm{P} = \dfrac{c}{g\sqrt{\rho}}\,\dfrac{\partial \pi}{\partial t}, \\ \mathrm{Q} = \dfrac{c^3}{g\sqrt{\rho}}\,\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}, \end{cases}$$

le système devient, en éliminant la composante horizontale de la vitesse :

$$(119) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial t} + \dfrac{3}{2}\dfrac{(\gamma-1)}{\mathrm{T_R}}\,\mathrm{P} + \left(\dfrac{c^2}{g\mathrm{H}} - 1\right)\dfrac{\partial \mathrm{U}}{\partial t} \\ \qquad\qquad = \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial t} + \dfrac{3}{2}\dfrac{\gamma-1}{\gamma \mathrm{T_R}}\,\mathrm{Q}, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial t^2} = -\,g\left(\dfrac{\partial_1}{\partial_z} - \dfrac{1}{2\mathrm{H}}\right)\mathrm{P} - \dfrac{g^2}{c^2}\,\mathrm{Q}, \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{Q}}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\mathrm{P} \\ \qquad\qquad - \dfrac{c^2}{g}\,\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{1}{2\mathrm{H}}\right)\mathrm{U}. \end{cases}$$

Pour obtenir le coefficient de transmission de U, P et Q considérons un mode simple, soit :

$$\mathrm{U, P, Q} \propto \exp i(\omega t + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}).$$

On obtient, par substitution dans (119) et par élimination successive de deux quelconques des inconnues, l'équation :

$$(120) \qquad \left[\Phi + \frac{3}{2}\frac{\gamma-1}{c^2\,\mathrm{T_R}}\right.$$

$$\left.\left\{\Phi + \frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{gk^2}{\mathrm{H}\omega^2} - \frac{\omega^2}{g\mathrm{H}}\right)\right\}\left(-\frac{i}{\omega}\right)\right]\mathrm{X}(x, y, z, t) = 0.$$

où l'opérateur Φ est défini par :

$$(121) \qquad \Phi \equiv -\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{1}{4\mathrm{H}^2} - \frac{\gamma-1}{\gamma}\,\frac{gk^2}{\mathrm{H}\omega^2}.$$

$\mathrm{X}(x, y, z, t)$ étant l'une quelconque des inconnues U, P, Q.

Pour $\mathrm{T_R} \to \infty$, on obtient l'équation de propagation des perturbations adiabatiques :

$$(122) \qquad \Phi \mathrm{X}(x, y, z, t) = 0.$$

Pour $\mathrm{T_R} = 0$, l équation (120) conduit à l'équation de propagation des perturbations isothermes.

$$(123) \qquad \left[-\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \quad \frac{\omega^2}{g\mathrm{H}} - \frac{1}{4\mathrm{H}^2}\right]\mathrm{X}(x, y, z, t) = 0.$$

Comme lors de l'étude du fluide homogène, on peut remarquer que l'approximation isotherme (123) peut s'obtenir formellement à partir de l'approximation adiabatique en écrivant formellement $\gamma = 1$; l'équation (120) montre cependant que la relaxation des températures ne peut en aucune manière être décrite de la même façon en substituant à γ une valeur comprise entre 1 et c_p/c_v.

Nous écrirons l'équation différentielle (120) sous la forme

$$(124) \qquad -\frac{\partial^2 \mathrm{X}}{\partial z^2} = (a + ib)\,\mathrm{X},$$

où a et b sont réels.

Les modes simples (k, ω) sont alors donnés par :

$$(125) \qquad \mathrm{X} \propto \exp i(\omega t + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x}) \exp i(\varphi + i\lambda)\, z,$$

où :

$$(126) \qquad \varphi + i\lambda = (a + ib)^{1/2},$$

la détermination du radical étant fixée, comme au chapitre III, par la condition de rayonnement d'énergie de la source vers l'infini.

Par identification de (120) et de (124), on obtient :

$$(127) \qquad a + ib + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{c^2} + k^2\left(1 - \frac{\mathrm{N}^2}{\omega^2}\right) = \frac{i}{\omega\tau}\left(a + ib + k^2 + \frac{\omega_0^2 - \gamma\omega^2}{c^2}\right).$$

où nous avons introduit les notations :

$$(128) \qquad \begin{cases} \tau_{\mathrm{R}} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{\gamma \mathrm{T_R}}{\gamma - 1}, \\ \omega_0^2 = \dfrac{c^2}{4\mathrm{H}^2}, \\ \mathrm{N}^2 = \dfrac{\gamma-1}{\gamma}\,\dfrac{g}{\mathrm{H}}. \end{cases}$$

N est la fréquence de Vaïsälä, et ω_0 la fréquence de coupure pour la propagation verticale des ondes adiabatiques (Lamb [17]). L'équation (127) se décompose en deux équations pour les grandeurs réelles a et b, dont la solution s'écrit :

$$(129)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2} + k^2\left(\dfrac{N^2}{\omega^2} - 1\right) \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{1+\omega^2\tau_R^2}\dfrac{N^2}{\omega^2}\left(k^2 - \dfrac{\omega^4}{g^2}\right), \\ b = \dfrac{\omega\tau_R}{1+\omega^2\tau_R^2}\dfrac{N^2}{\omega^2}\left(k^2 - \dfrac{\omega^4}{g^2}\right). \end{cases}$$

Pour calculer λ et φ nous devons maintenant examiner le problème du choix de la détermination de $(a + ib)^{1/2}$ qui correspond au rayonnement d'énergie par la source, c'est-à-dire à un flux d'énergie positif suivant l'axe 0z. La situation est moins simple que dans le cas homogène, car d'après la deuxième équation (129) le produit $\omega\lambda\varphi$ a le signe de $k^2 g^2 - \omega^4$ et n'a donc pas le même signe pour tous les modes (k, ω).

Physiquement cela exprime que les ondes évanescentes, (définies par $\lambda \geqslant 0$) sont des ondes à phase montante pour certains modes, et à phase descendante pour d'autres.

Quel que soit l'état de mouvement, le flux vertical d'énergie acoustique, assimilé au flux d'énergie « externe » introduit par Eckart [8], est :

$$F = \mathcal{R}\text{é} < V_z \pi^* >,$$

où $< \quad >$ est la moyenne sur le plan horizontal z.

D'après la définition (118) des variables P et U, on a :

$$F = \frac{g}{c^2}\mathcal{R}\text{é} < \frac{UP^*}{-i\omega} >.$$

Par élimination de Q dans (119) on peut obtenir entre U et P la relation :

$$(130)\quad \left(\omega^2 + g\left(i\varphi - \lambda - \frac{1}{2H}\right)\right) U = \left(g\left(i\varphi \quad \lambda \quad - \frac{1}{2H}\right) + \frac{g^2 k^2}{\omega^2}\right) P.$$

La condition de rayonnement s'écrit :

$$\mathcal{R}\text{é} < i\ UP^* > \geqslant 0,$$

soit en utilisant (130)

$$(131)\qquad \omega\varphi(g^2 k^2 - \omega^4) \geqslant 0.$$

D'autre part d'après (129) et

$$b = 2\lambda\varphi.$$

on a également

$$(132)\qquad \omega\lambda\varphi(g^2 k^2 - \omega^4) \geqslant 0,$$

ce qui permet d'écrire la condition de rayonnement (131) sous la forme :

$$(133)\qquad \lambda \geqslant 0 \text{ quels que soient } k, \omega,$$

ce qui fixe la détermination de $(a + ib)^{1/2}$ physiquement significative. Le facteur de transmission.

$$(134)\qquad |f(k, \omega, z)|^2 = \exp - 2\lambda z,$$

est donc complètement défini par les relations (126), (129) et (133),

En rappelant que le facteur de transmission (134) est relatif non pas aux composantes de la vitesse, mais d'après (129) aux composantes de $\sqrt{\rho}\, \boldsymbol{v}$, on peut écrire :

$$(135)\quad < \rho \boldsymbol{v}^2 > = \int_0^\infty dk \int_0^\infty d\omega\ K(k, \omega) \exp - 2\lambda z,$$

où $K(k, \omega)$ est un noyau positif ou nul dont la forme dépend de la densité spectrale de la source, c'est-à-dire du mouvement en $z = 0$. D'après (133) et (135) on voit que les conditions :

— rayonnement de l'énergie acoustique de la source vers l'infini quelle que soit la densité spectrale de la source,

— densité d'énergie cinétique moyenne strictement non-croissante avec l'altitude quelle que soit la densité spectrale de la source sont équivalentes.

Ce résultat appelle plusieurs remarques :

a) contrairement à ce qui se produit dans le cas du fluide homogène, la solution retenue comme solution physique correspond, comme la solution rejetée, à des perturbations (vitesses, pression etc...) tendant vers l'infini exponentiellement avec la distance à la source. La solution physique est seulement celle qui diverge le moins vite, ce qui ne pouvait être invoqué *a priori* pour fixer la détermination.

b) En passant aux limites $\tau_R \to 0$ et $\tau_R \to \infty$, on voit que les modes strictement stationnaires obtenus en l'absence de dissipation ($\varphi = 0$, $\lambda \neq 0$) sont encore donnés par la solution $\lambda \geqslant 0$. La démonstration directe, en considérant une atmosphère strictement non dissipative, serait beaucoup plus difficile, même en se limitant au cas particulier des ondes horizontales $k = 0$.

c) La condition (133) est basée de façon essentielle sur l'utilisation du concept d'énergie externe introduite par Eckart. La cohérence du résultat nous semble ajouter un argument à ceux, très importants développés par Eckart en faveur de ce concept.

Diagramme diagnostique de l'atmosphère isotherme radiative.

La solution (126), (129), (133) nous permet de définir une classification des modes (k, ω), c'est-à-dire de définir un diagramme diagnostique du fluide homogène, par référence aux propriétés du mouvement en l'absence de dissipation. Du fait de la dissipation radiative, il n'y a pas de modes purement progressifs ($\lambda = 0$) ou purement stationnaires ($\varphi = 0$), mais on peut comme dans le cas du fluide homogène dissipatif classer les modes en fonction de l'amortissement par longueur d'onde verticale $\lambda/|\varphi|$. On obtiendra ainsi une généralisation naturelle de la classification en mode progressifs amortis et en modes évanescents modifiés. Cette classification sera cependant insuffisante, du fait que la propagation résulte ici de la superposition de deux causes physiques distinctes : la compressibilité et la stratification. Il est donc nécessaire de distinguer les modes par un critère supplémentaire caractérisant le phénomène physique dominant la propagation.

Pour obtenir un tel critère, considérons brièvement quelques cas particuliers du modèle et les propriétés correspondantes du mouvement

a) $$\tau_R \to \infty,\ g = 0.$$

Le modèle se réduit alors au fluide homogène non dissipatif examiné au chapitre II. Les modes progressifs sont alors des ondes acoustiques. La surface des indices est le *cercle* d'équation :

$$\frac{k^2}{\omega^2} + \frac{\varphi^2}{\omega^2} = c^2,$$

b) $$\tau_R \to \infty,\ \gamma \to \infty.$$

Le modèle correspondant est un fluide non dissipatif, incompressible ($c^2 \to \infty$) et stratifié avec l'échelle de hauteur de la densité H (voir par exemple Tolstoï [42]). Les équations précédentes, ou plus simplement un calcul direct, montre que les modes k, ω)

$$\sqrt{\rho}\, v_z \propto \exp i(\omega t + kx + (\varphi + i\lambda)\, z),$$

vérifient

$$\varphi + i\lambda = \left\{ k^2 \left(\frac{g}{H\omega^2} - 1 \right) - \frac{1}{4H^2} \right\}^{1/2}.$$

Le fluide étant incompressible, les modes progressifs ($\lambda = 0$) sont ici des ondes de gravité pures. Les surfaces des indices sont les *hyperboles* d'équations :

$$\frac{k^2}{\omega^2} \left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1 \right) - \frac{\varphi^2}{\omega^2} = \frac{1}{4H^2\, \omega^2}.$$

La surface des indices est donc qualitativement différente pour des ondes acoustiques pures et des ondes de gravité pures. Cette différence qualitative de la géométrie des surfaces des indices peut se traduire en terme de propriétés physiques.

En effet, la surface des indices permet de comparer la propagation de la phase et la propagation d'énergie des ondes planes. En chaque point de la surface des indices, la surface équiphase est le plan normal au rayon vecteur de ce point, c'est-à-dire au vecteur d'onde, et l'énergie se propage suivant les rayons acoustiques, c'est-à-dire, suivant la normale à la surface des indices. Nous voyons que la différence de concavité entre les surfaces des indices des modèles *a*) et *b*) a la conséquence physique suivante :

— Dans le fluide homogène, la phase et l'énergie se propagent verticalement dans le même sens pour tous les modes progressifs.

— Dans le fluide incompressible stratifié, la phase et l'énergie se propagent verticalement en sens opposés pour tous les modes progressifs.

La propagation de l'énergie vers les $z > 0$ étant une condition aux limites du problème, et le sens de propagation de la phase des modes simples étant déterminé par le signe du produit $\omega\varphi$, on peut exprimer les propriétés énoncées ci-dessus de la façon suivante :

Les modes progressifs sont caractérisés par :

— $\varphi\omega < 0$ dans le fluide homogène compressible *a*).

— $\varphi\omega < 0$ dans le fluide incompressible stratifié *b*).

Les remarques précédentes montrent que le signe de $\omega\varphi$ détermine une propriété qualitative importante de la surface des indices. D'autre part, d'après $b = 2\lambda\varphi$ et $\lambda \geqslant 0$, $\omega\varphi$ a le signe de ωb.

Nous sommes conduit à généraliser la distinction entre ondes de gravité et ondes acoustiques au cas de l'atmosphère isotherme compressible radiative, de la façon suivante :

Nous dirons que la propagation est du type « onde acoustique » si $\omega b < 0$, et du type « onde de gravité » si $\omega b > 0$.

Nous obtenons donc une première division du plan (k, ω) pour définir le diagramme diagnostique.

Il est remarquable que cette partition soit indépendante du temps de relaxation des températures. En effet, d'après (129), la séparation entre les domaines « acoustiques » et « gravité » est définie par :

(136) $$g^2 k^2 = \omega^4,$$

quelque soit τ_R. Ceci est à rapprocher du fait que la

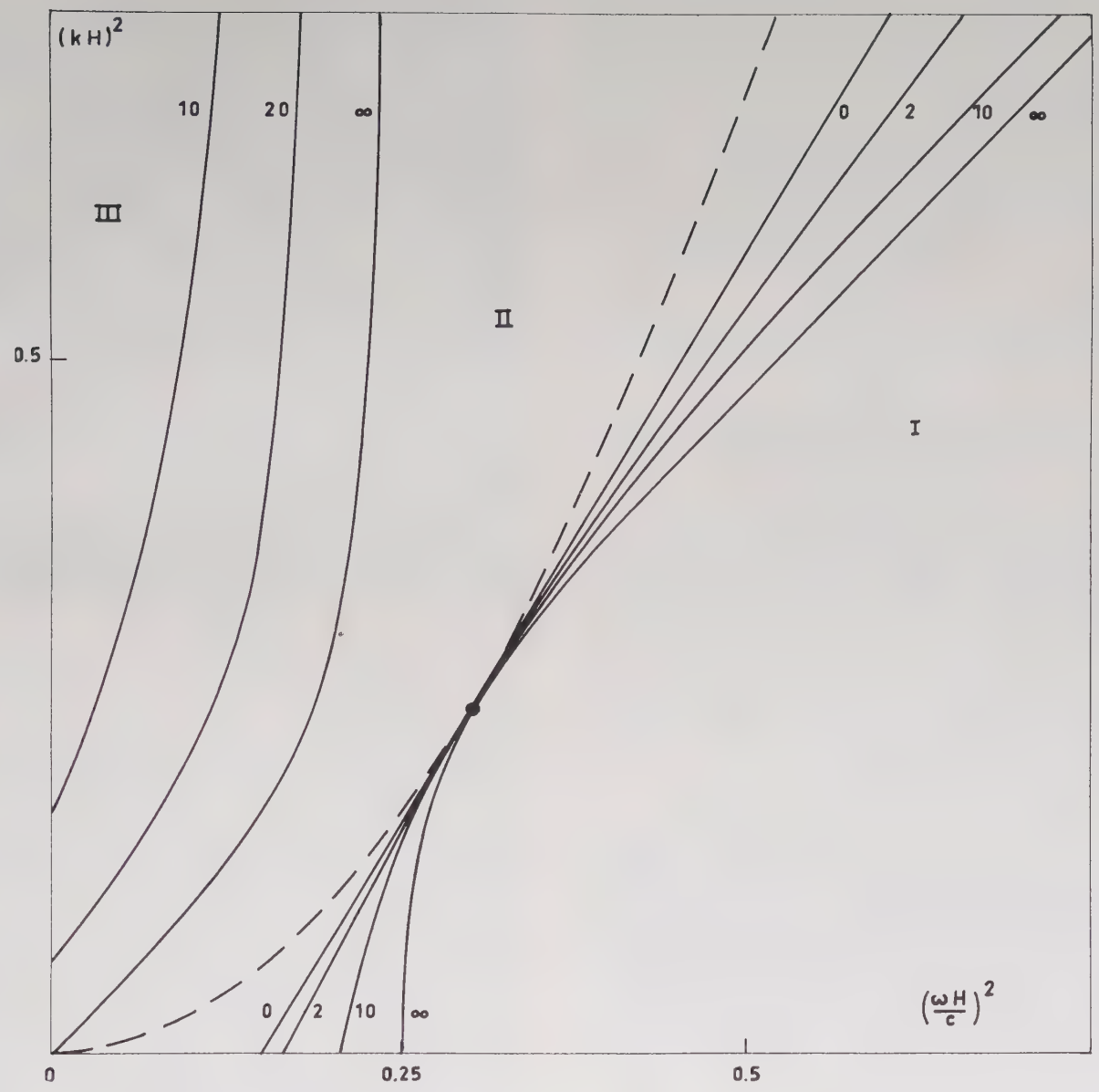

FIG. 9. — Diagramme diagnostique de l'atmosphère isotherme radiative. En traits pleins les courbes $a(k, \omega) = 0$, indexées par la valeur du paramètre $N\tau_R$. En tirets la courbe $b(k, \omega) = 0$.

relaxation des températures n'affecte pas non plus la stabilité de l'atmosphère, l'équation (116) donnant le critère de Schwarzschild quel que soit τ_R. Il est également notable, en vue d'extensions ultérieures de la théorie que la courbe $\omega^4 = k^2 g$ est aussi un élément important du diagramme diagnostique de l'atmosphère compressible non dissipative à *gradient* de température constant ou « thermosphère » (cf. ECKART [8]).

Le caractère de la propagation étant déterminé par le signe de ωb, on peut compléter la classification des modes en considérant, de la même façon que dans l'étude du fluide homogène dissipatif, l'amortissement par longueur d'onde $\lambda/|\varphi|$. On a, comme au chapitre précédent

$$a = \varphi^2 - \lambda^2,$$

ce qui conduit à nouveau à considérer comme modes *progressifs amortis les modes pour lesquels* $a(k, \omega) < 0$ et comme modes *évanescents modifiés les modes pour lesquels* $a(k, \omega) < 0$.

Le diagramme diagnostique est donc défini dans le plan (k, ω) par les courbes.

(137) $$a(k, \omega) = 0,$$

et,

$$b(k, \omega) = 0. \tag{138}$$

Soit d'après (129),

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\omega^2 \frac{\gamma + \omega^2 \tau_R^2}{1 + \omega^2 \tau_R^2} - \omega_0^2}{\omega^2 - N^2 \left(1 - \frac{1}{1 + \omega^2 \tau_R^2}\right)} \tag{139}$$

et,

$$k^2 = \omega^4 / g^2. \tag{140}$$

En portant (140) dans (129) on obtient pour $b = 0$

$$a(k, \omega) = - \left(\frac{\omega^2}{g} - \frac{1}{2H}\right)^2,$$

donc,

$$b = 0 \Rightarrow a(k, \omega) \leqslant 0, \tag{141}$$

la séparation (136) entre les deux différents types de propagation est donc entièrement située dans le domaine $a \leqslant 0$ des modes évanescents modifiés.

Condition d'existence des ondes de gravité.

L'équation (139) montre que le diagramme diagnostique se présente sous des aspects *qualitativement* différents suivant que le temps de relaxation τ_R est supérieur ou inférieur à N^{-1} (fig. 9).

1) $\tau_R N > 1$ (*Grands temps de relaxation*),

$a(k, \omega) = 0$ définit trois régions dans le plan (k, ω), une région de modes évanescents modifiés comprise entre deux régions de modes progressifs amortis. D'après (140) et (141) et la distinction que nous avons définie plus haut, les modes progressifs de haute fréquence (région I de la fig. 9) sont des ondes acoustiques amorties et les modes progressifs de basse fréquence (région III de la figure) sont des ondes de gravité amorties.

Pour $\tau_R \to \infty$, on obtient le diagramme diagnostique classique de l'atmosphère isotherme dans l'hypothèse des perturbations adiabatiques.

Pour des temps de relaxations finis $1 < N \tau_R < \infty$ le diagramme est notablement différent.

La principale différence qualitative, qui distingue également ce diagramme de celui proposé par exemple par Whitaker [46] et par Moore et Spiegel [24] en introduisant un γ effectif différent de c_p/c_v, est l'existence d'une *limite inférieure non nulle pour le nombre d'onde horizontal des ondes de gravité*. En effet, d'après (138) le nombre d'onde des modes du domaine III est supérieur à k_m défini par :

$$k_m^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} \frac{1}{N^2 \tau_R^2 - 1}. \tag{142}$$

2) $\tau_R N < 1$ (*Faibles temps de relaxation*),

$a(k, \omega) = 0$ ne définit alors *que deux régions* : la région I des ondes acoustiques amorties et la région II des modes évanescents modifiés.

Pour $\tau_R \to 0$ on obtient le diagramme diagnostique de l'atmosphère isotherme dans l'hypothèse des perturbations isothermes. Ce diagramme peut être obtenu en donnant formellement à γ la valeur effective $\gamma_e = 1$ dans l'équation définissant le diagramme diagnostique pour des perturbations adiabatiques. Mais en opérant de cette façon on obtient pour tout $\gamma_e \neq 1$ un diagramme diagnostique divisé en trois régions, avec un domaine d'ondes de gravité à basses fréquences. Nous voyons que cette méthode conduit à un diagramme diagnostique qualitativement incorrect si la relaxation des températures est importante : *les ondes de gravité* (telles que nous les avons définies par $a > 0$, $\omega b > 0$) *ne peuvent exister dans une atmosphère isotherme que si le temps de relaxation des températures est assez grand, plus précisément que si* :

$$N\tau_R > 1. \tag{143}$$

Les fréquences évanescentes dans l'atmosphère isotherme radiative.

Quelle que soit la valeur du temps de relaxation des températures, il existe des fréquences auxquelles ne correspondent aucun mode progressif, c'est-à-dire, pour lesquelles les modes (k, ω) appartiennent à la région II pour tout k. Ces fréquences que nous désignons sous le nom de fréquences évanescentes, présentent un intérêt particulier. Moore et Spiegel [24] ont suggéré que l'atmosphère se comporterait comme un résonateur pour ces fréquences. Il ne semble pas que cette suggestion puisse être étayée par une étude dynamique, c'est-à-dire tenant compte explicitement des termes de source. L'étude précédente indique plutôt que si de l'énergie est fournie par la source dans ces modes, son transport se fait non par augmentation de l'amplitude, mais par la modification du déphasage entre la vitesse et la pression. Dans l'optique différente du filtrage des modes ces fréquences évanescentes se distinguent qualitativement comme celles pour lesquelles le filtrage est le plus efficace, tous les modes correspondants étant évanescents.

Dans l'hypothèse des perturbations adiabatiques, les fréquences évanescentes forment la bande définie par :

$$N < \omega < \omega_0,$$

soit, d'après les définitions (128).

$$\gamma \frac{1}{\gamma} \frac{g}{H} < \omega^2 < \frac{\gamma g}{4H}.$$

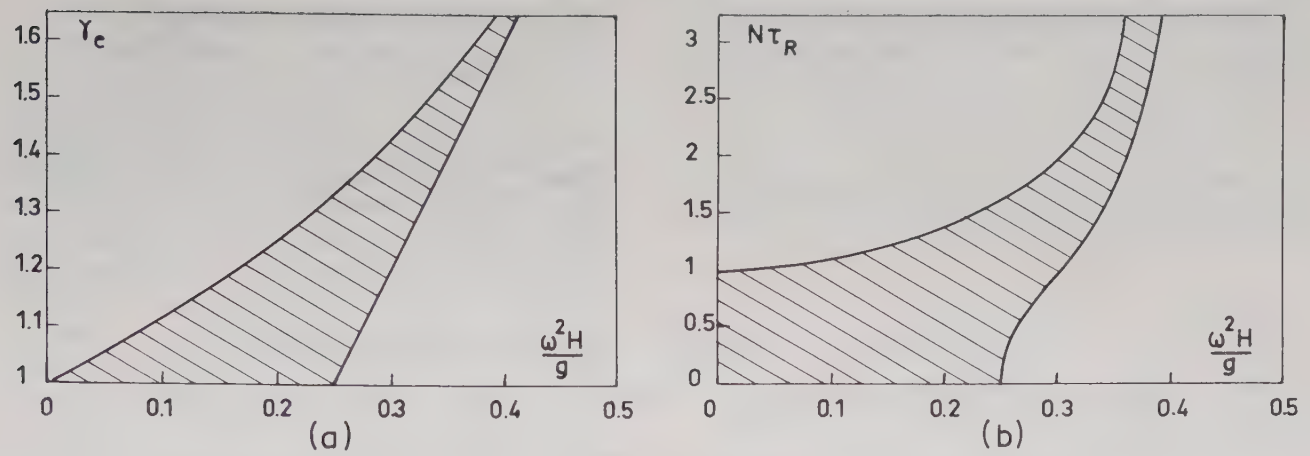

FIG. 10. — Fréquences progressives et évanescentes (zones hachurées) dans une atmosphère isotherme radiative. (*a*) : en utilisant une valeur « effective » de γ ; (*b*) : en traitant explicitement la dissipation radiative.

Représentant la relaxation des températures en substituant à γ une valeur effective γ_e, MOORE et SPIEGEL obtiennent en présence de dissipation la bande de fréquence.

$$(144) \qquad \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_e}\frac{g}{H} < \omega^2 < \frac{\gamma_e\, g}{4H}.$$

L'atmosphère apparaît ainsi comme en atténuateur de bande (fig. 10) sauf dans le cas extrême des perturbations isothermes représentées par $\gamma_e = 1$.

Le traitement plus explicite de la relaxation thermique que nous avons développé nous conduit à un résultat qualitativement différent : nous avons vu en effet qu'il n'y a pas de basses fréquences progressives (ou ondes de gravité) si $\tau_R N < 1$, c'est-à-dire même pour des valeurs non nulles du temps de relaxation. Plus précisément, les fréquences évanescentes sont définies d'après (139), par :

$$(145) \qquad \omega_2 < \omega < \omega_1,$$

avec :

$$(146) \quad \omega_1^2 = \frac{1}{2}\left\{\omega_0^2 - \frac{\gamma}{\tau_R^2} + \left[\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma}{\tau_R^2}\right)^2 + \frac{4\omega_0^2}{\tau_R^2}\right]^{1/2}\right\}$$

et :

$$(147) \quad \begin{cases} \omega_2^2 = N^2 - \dfrac{1}{\tau_R^2} & \text{si} \quad \tau_R N \geqslant 1, \\ \omega^2 = 0 & \text{si} \quad \tau_R N < 1. \end{cases}$$

La figure (10) illustre ces relations. L'équation (147) met clairement en évidence le fait que l'atmosphère est un *filtre passe-haut* si la relaxation des températures est assez rapide, alors que la condition (144) excluait pratiquement un tel filtrage.

Analogie formelle entre la propagation horizontale ($k = 0$) dans une atmosphère isotherme et la propagation dans un fluide homogène.

Dans le cas particulier des modes purement verticaux ($k = 0$) les équations (129) se réduisent à la forme simple

$$(148) \quad \begin{cases} a = \dfrac{(\omega\tau_R)^2 + \gamma}{(\omega\tau_R)^2 + 1}\dfrac{\omega^2}{c^2} - \dfrac{\omega_0^2}{c^2}, \\ b = (1-\gamma)\dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{\omega\tau_R}{1 + (\omega\tau_R)^2}. \end{cases}$$

Ces relations sont identiques à celles obtenues par NOYES et LEIGHTON [25].

Il est remarquable qu'elles soient formellement identiques aux équations (96) : l'étude des modes verticaux dans une atmosphère isotherme de fréquence de coupure ω_0 se réduit donc à l'étude des modes de nombre d'onde « horizontal » (au sens défini précédemment),

$$k = \frac{\omega_0}{c}$$

dans un fluide homogène de même température.

En particulier les courbes d'égal rapport φ/λ et d'égal amortissement λ sont encore définies par (104) et (112) en effectuant la substitution (148), et illustrées par les figures (7) et (8).

La structure simple des courbes d'égal amortissement λ dans le plan ($\omega_0 \tau_R$, $\omega\tau_R$) (fig. (8)) permet de dégager les propriétés suivantes.

— Quel que soit le temps de relaxation,

$$\lambda = \frac{1}{2H} \qquad \text{pour} \quad \omega = 0,$$

$$\lambda \to \frac{2}{\gamma - 1}\frac{1}{c\tau_R} \qquad \text{pour} \quad \omega \to \infty.$$

— Pour les faibles temps de relaxation.

$$0 < (\omega_0 \tau_R)^2 < \gamma + 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)^2,$$

l'amortissement λ présente un minimum pour une fréquence finie $0 < \omega < \infty$.

— Pour les forts temps de relaxation

$$(\omega_0 \tau_R)^2 \geqslant \gamma + 1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)^2,$$

l'amortissement est une fonction *monotone décroissante* de la fréquence. C'est la situation inverse de celle obtenue pour l'onde plane ($k = 0$) dans le fluide homogène.

V. L'atmosphère isotherme à temps de relaxation nul. Applications aux mouvements oscillatoires dans la basse atmosphère.

La photosphère comme filtre passe-haut.

Pour pouvoir calculer l'état de mouvement résultant du filtrage des modes par l'atmosphère solaire, il est nécessaire de connaître les densités spectrales du mouvement de la source et le facteur de transmission de cette atmosphère. Ce dernier facteur peut être calculé numériquement à partir d'un modèle. Notre but est évidemment de schématiser un tel modèle par une structure assez simple pour mettre en évidence les propriétés qualitatives du filtrage. Une caractéristique importante des modèles actuels de la basse chromosphère solaire est l'existence d'un minimum de température (cf. par exemple [12]), ce qui conduit à représenter localement la chromosphère comme isotherme. En prolongeant cette représentation locale jusqu'à la source, c'est-à-dire, jusqu'à la zone convective vers le bas et à l'infini vers le haut on néglige essentiellement l'effet des réflexions. Les réflexions ont fait l'objet de nombreuses études (voir introduction). Pour porter notre attention, en première analyse, sur des effets différents, nous supposerons que le mouvement au voisinage du minimum des températures n'est influencé que de façon négligeable par les réflexions dans les couches supérieures.

Nous considérerons donc un modèle *isotherme semi-infini*.

Noyes et Leighton [25] ont calculé le temps de relaxation par rayonnement des perturbations optiquement minces dans la photosphère et la basse chromosphère en utilisant l'estimation :

$$(150) \qquad T_R^{-1} = \frac{16\, k\sigma\, T^3}{\rho c_V},$$

établie par Spiegel [35]. Ils trouvent que les temps de relaxation varient rapidement avec l'altitude. Il est donc difficile de représenter la basse chromosphère par une atmosphère isotherme avec un temps de relaxation constant, à laquelle on pourrait associer un diagramme diagnostique du type étudié au chapitre précédent. On peut cependant associer à chaque altitude un diagramme diagnostique défini par la température et le temps de relaxation locale, et il est remarquable qu'au voisinage du minimum de température, disons à des profondeurs optiques comprises entre 0,8 et 0,001, le diagramme varie avec l'altitude essentiellement du fait des variations du temps de relaxation τ_R et non du fait des variations de température.

Malgré cette difficulté, une propriété qualitative essentielle du point de vue du filtrage se dégage. La fréquence de Vaïsälä est de l'ordre de $(30\ \text{s.})^{-1}$. En calculant le temps de relaxation à l'aide de la formule de Spiegel (150) et du modèle « Utrecht Reference Model » [12], on trouve :

$$\tau_R\, N < 1,$$

pour les profondeurs optiques τ_c supérieures à $\tau_c \approx 0.01$.

L'application de la formule (150) à des profondeurs optiques supérieures à 0,1 est certainement discutable, le libre parcours local du photon devenant inférieur à l'épaisseur de la zone considérée. Un autre argument renforce l'hypothèse que ces couches relativement profondes s'opposent également à la propagation des basses fréquences sous forme d'ondes de gravité. En effet, la zone de transition entre la région convectivement stable et la région convectivement instable en équilibre est indifférent : la fréquence de Vaïläsä locale s'annule donc pour $\tau_c \approx 0.8$, ce qui compense l'augmentation du temps de relaxation.

D'après les conclusions du chapitre précédent, la photosphère se comporte donc localement comme un filtre passe-haut dans toute la zone comprise entre $\tau_c \approx 0.8$ (sommet de la zone convective et

$\tau_c \approx 0.01$ *L'ensemble de cette zone constitue donc un filtre passe-haut, non seulement pour les ondes à propagation verticale, mais pour tous les modes, quel que soit le nombre d'onde horizontal.*

De plus la condition $\tau_R N > 1$ est trop restrictive. Elle correspond à l'absence stricte d'onde de gravité suivant notre définition de ces ondes, définition basée sur la considération de l'amortissement par longueur d'onde verticale. Le calcul effectif de l'amortissement à partir de (129) montre que les ondes de gravité sont très fortement amorties pour $\tau_R N \approx 1$, ce qui conduit à élargir sensiblement l'épaisseur de la zone passe-haut.

Enfin la résolution instrumentale impose une valeur maximum au spectre observable des nombres d'ondes horizontales. Pour la chromosphère, cette coupure est de l'ordre de $(1000\ \text{km})^{-1}$, ce qui élargit à $\tau N \gtrsim 1.8$ la condition d'observabilité d'ondes de gravité, *même très amorties*, en utilisant la valeur (142) du nombre d'onde minimum des modes progressifs de basses fréquences.

On est donc conduit à admettre que la basse chromosphère se comporte comme un filtre passe-haut jusqu'à une profondeur optique de l'ordre de 10^{-3}, c'est-à-dire sur une épaisseur de 300 à 400 km.

La représentation de la photosphère par un modèle isotherme à temps de relaxation fini est cependant rendue difficile par la rapide variation du temps de relaxation τ_R, qui entraîne une variation de la fréquence de coupure de l'ordre de $\sqrt{\gamma}$ dans la région passe-haut. Ce déplacement de la fréquence de coupure traduit en fait une variation de la vitesse du son et se manifeste en particulier par la réflexion des ondes *acoustiques* de fréquence de l'ordre de la fréquence de coupure. Le calcul du facteur de transmission du modèle par les relations (134), (126) et (129) négligeant ces réflexions, ne peut rendre compte quantitativement de l'état de mouvement dans la chromosphère avec une précision justifiant l'introduction dans le modèle du paramètre supplémentaire τ_R.

Pour mettre en évidence les propriétés qualitatives du mouvement nous allons donc simplifier le modèle de façon à représenter le filtrage des basses fréquences, mais en s'affranchissant des difficultés introduites par la dissipation. Ceci nous conduit à reprendre le modèle d'*atmosphère isotherme à temps de relaxation nul* (Souffrin [34]).

Le modèle isotherme à temps de relaxation nul.

Le diagramme diagnostique prend alors une forme particulièrement simple. En effet, d'après (123) les modes simples sont de la forme

$$X(x, y, z, t) \propto \exp i[\omega t + \boldsymbol{k}.\boldsymbol{x} + (\varphi + i\lambda)\, z],$$

avec

$$(151) \qquad (\varphi + i\lambda)^2 = \frac{\gamma}{c^2}(\omega^2 - \Omega_0^2) - k^2,$$

où

$$\Omega_0^2 = \frac{g}{4H}.$$

Comparant cette relation avec (37) on voit que *le facteur de transmission* des variables (118), c'est-à-dire $\sqrt{\rho}\,\mathbf{v}$, $\pi/\sqrt{\rho}$ et $\sigma/\sqrt{\rho}$, *se déduit du facteur de transmission dans un fluide homogène* (41) *en y substituant* simplement $\omega^2 - \Omega^2$ à ω^2.

Les équations (150) et (41) diffèrent également par le facteur γ, mais ce facteur vient de ce que (41) est écrit pour des perturbations adiabatiques, et disparaît si on considère des perturbations isothermes.

Il en résulte une similitude des diagrammes diagnostiques correspondants.

Dans le plan $\left(k^2, \gamma\,\frac{\omega^2}{c^2}\right)$ le diagramme diagnostique du fluide isotherme pour $\tau = 0$ est défini par la parallèle à la bisectrice $k = k_c(\omega)$ avec :

$$(152) \qquad k_c^2(\omega) = \frac{\gamma}{c^2}(\omega^2 - \Omega_0^2)$$

Les modes $k < k_c$ sont des modes acoustiques non amortis ($\lambda = 0$, $\varphi \neq 0$) et les modes $k > k_c$ sont des modes stationnaires évanescents ($\varphi = 0$, $\lambda \neq 0$).

Enfin, les densités spectrales des variables $\sqrt{\rho}\,\boldsymbol{v}$ et $\pi/\sqrt{\rho}$ sont liées par les mêmes relations pour les modes acoustiques dans le fluide homogène et dans l'atmosphère isotherme à temps de relaxation nul. En effet, l'équation de conservation de la quantité du mouvement suivant oz :

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \pi}{\partial z} - g\,\frac{\sigma}{\rho},$$

s'écrit en utilisant pour éliminer σ le fait que les fluctuations de température sont nulles ($\tau_R = 0$) :

$$(153) \qquad \frac{\partial}{\partial t}(\sqrt{\rho}\, V_z) = -\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{2H}\right)(\pi/\sqrt{\rho}),$$

soit pour un mode acoustique :

$$(154) \qquad i\omega\sqrt{\rho}\, V_z = \left(i\varphi - \frac{1}{2H}\right)\pi/\sqrt{\rho}.$$

En notant respectivement $F_v(k, \omega)$ et $F_p(k, \omega)$ les densités spectrales de $\sqrt{\rho}\, V_z$ et de $\pi/\sqrt{\rho}$ on obtient en égalant les modules des deux membres.

$$\omega^2 F_v(k, \omega) = \left(\varphi^2 + \frac{1}{4H^2}\right) F_p(k, \omega),$$

et d'après (151)

$$\varphi^2 = \frac{\gamma}{c^2}\omega^2 - \frac{1}{4H^2} - k^2,$$

soit :

$$(155) \quad \omega^2 F_v(k, \omega) = \left(\frac{\gamma\omega^2}{c^2} - k^2\right) F_p(k, \omega),$$

c'est-à-dire la même relation que pour les modes acoustiques dans un fluide homogène. On vérifie qu'il en est de même pour les densités spectrales associées aux composantes horizontales de la vitesse des modes acoustiques.

La similitude est cependant limitée aux modes progressifs, la relation entre les densités spectrales des vitesses verticales et des pressions des modes évanescents étant différente dans les deux modèles.

Structure de l'image à l'infini donnée par l'atmosphère isotherme à temps de relaxation nul.

A grande distance de la source l'importance relative des modes évanescents est négligeable, et les propriétés du mouvement sont celles des seuls modes acoustiques. Les remarques précédentes nous montrent qu'*on peut transposer directement* au modèle considéré ici *les résultats démontrés dans le cas du fluide homogène* sur la structure *de l'image à l'infini*. Il suffit de remplacer dans l'expression (49) (66) des fonctions d'autocorrélation k_c par l'expression (152).

En particulier, si l'atmosphère est excitée au voisinage d'une fréquence $\omega > \Omega_0$ par des « pistons » de dimension caractéristique L, l'image à l'infini est constituée de « pistons » oscillants à la même fréquence. On dira que les pistons sont grands ou petits respectivement si $k_c L \gg 1$ ou $k_c L \ll 1$, avec ici d'après (152)

$$k_c L = \frac{\sqrt{\gamma}}{c}\sqrt{\Omega_0^2 - \omega^2}\, L.$$

Si les pistons sont grands ($k_c L \gg 1$) la structure spatiale de l'image est identique à celle de la source.

Si les pistons sont petits ($k_c L \ll 1$), l'image à l'infini sera diffractée. Les fonctions d'autocorrélation correspondantes sont données par (131) en y faisant $L \to 0$. Les trois premières équations sont formellement identiques ; les fonctions d'autocorrélation des pressions, des vitesses longitudinales et transversales sont encore données par les relations (147), (150), (151), c'est-à-dire :

$$(156) \quad \begin{cases} \Phi_{\pi\infty}(r, 0) = \Phi_{\pi\infty}(0, 0)\, 2\, \dfrac{J_1(k_c r)}{k_c r}, \\ \Phi_{T\infty}(r, 0) = \Phi_{T\infty}(0, 0)\, 8\, \dfrac{J_2(k_c r)}{(k_c r)^2}, \\ \Phi_{L\infty}(r, 0) = \Phi_{L\infty}(0, 0) \\ \qquad\qquad 8\left[\dfrac{J_1(k_c r)}{k_c r} - 3\,\dfrac{J_2(k_c r)}{(k_c r)^2}\right]. \end{cases}$$

Ces relations sont illustrées par la figure 2, k_c étant ici défini par (152).

Par contre, la figure de diffraction des vitesses verticales est différente de (72), car la dernière équation (131) donnant la fonction d'autocorrélation des vitesses verticales

$$\Phi_{V\infty}(r, 0) \propto \int_0^{k_c} dk\, k \left(\gamma\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right) J_0(kr),$$

qui s'écrivait

$$\Phi_{V\infty}(r, 0) \propto \int_0^{k_c} dk\, k(k_c^2 - k^2)\, J_0(kr),$$

dans le fluide homogène s'écrit ici

$$(157) \quad \Phi_{V\infty}(r, 0) \propto \int_0^{k_c} dk\, k \left(k_c^2 - k^2 + \frac{\gamma\Omega_0^2}{c^2}\right) J_0(kr),$$

soit (cf. Appendice).

$$(158) \quad \Phi_{V\infty}(r, 0) = \Phi_{V\infty}(0, 0)\left[\frac{2}{2(k_c H)^2 + 1}\right] \left\{ 8\,(k_c H)^2\, \frac{J_2(k_c r)}{(k_c r)^2} + \frac{J_1(k_c r)}{k_c r} \right\}.$$

Pour les hautes fréquences $k_c H \gg 1$ on retrouve la forme :

$$(159) \qquad \Phi_{V\infty}(r, 0) \propto \frac{J_2(k_c r)}{(k_c r)^2},$$

correspondant au fluide homogène, puisque l'échelle de hauteur est alors très grande devant la longueur d'onde.

Pour les fréquences de l'ordre de la fréquence de coupure Ω_0, $k_c H \ll 1$ et (158) devient :

$$(160) \qquad \Phi_{V\infty}(r, 0) \propto \frac{J_1(k_c r)}{k_c r}.$$

soit d'après (156)

$$\Phi_{V\infty}(r, 0) \approx \Phi_{\pi\infty}(r, 0).$$

Les formes (159) et (160), et (158) qui en représente une moyenne pondérée sont qualitativement très semblables (cf. fig. 2).

On peut résumer ces résultats de la même façon que dans le cas du fluide homogène, en tenant compte du changement de définition de k_c :

Une atmosphère isotherme à temps de relaxation nul excitée au voisinage d'une fréquence $\omega < \Omega_0$ *par des éléments de petites dimensions*

$$\left(L^2 \ll \frac{c^2}{\omega^2 - \Omega_0^2}\right)$$

donne à l'infini une image diffractée constituée d'éléments de dimensions de l'ordre de $c/\sqrt{\omega^2 - \Omega_0^2}$ *oscillant à la même fréquence.*

Enfin dans tous les cas des fréquences $\omega \ll \Omega_0$ sont complètement filtrées, ce qui enlève toute signification à l'étude du mouvement à l'infini.

Si on considère non plus l'excitation par des « pistons » concentrée au voisinage d'une fréquence ω, mais une excitation turbulente quelconque, les résultats relatifs à la structure de l'image à l'infini dans un fluide homogène se transposent de la façon suivante :

Soit $F_0(k, \omega)$ la densité spectrale d'une grandeur caractéristique du mouvement de la source excitant l'atmosphère isotherme ; considérons un fluide homogène de même vitesse du son excitée par la source représentée par la densité spectrale

$$\widetilde{F}_0(k, \omega) = F_0(k, \sqrt{\omega^2 + \Omega^2}),$$

c'est-à-dire par la densité F_0 translatée de $-\Omega_0^2$ dans le plan (k^2, ω^2), et appelons mouvement équivalent le mouvement à l'infini dans ce fluide homogène. La structure spatiale du champ horizontal de la grandeur considérée à l'infini dans l'atmosphère isotherme est identique à la structure spatiale dans le mouvement équivalent. Le spectre de puissance $P(\omega)$ à l'infini dans l'atmosphère isotherme est nul pour $\omega \leqslant \Omega_0$, et est égal au translaté

$$P(\omega) = \widetilde{P}(\sqrt{\omega^2 - \Omega_0^2}),$$

du spectre de puissance $\widetilde{P}(\omega)$ du mouvement équivalent.

En particulier, si L* et θ* sont respectivement la dimension et la durée de vie des éléments de la source du mouvement équivalent, la dimension des éléments du mouvement à l'infini sera de l'ordre de L* si $L^* \gg c\theta^*$, et de l'ordre de $c\theta^*$ si $L \ll c\theta^*$.

Le mouvement au voisinage de la source.

La considération de l'image complètement filtrée présente l'intérêt de dégager nettement et très simplement les propriétés qualitatives du mouvement lointain. En ce qui concerne l'atmosphère solaire, ou tout au moins la région passe-haut de cette atmosphère, l'intérêt de cette image à l'infini est quelque peu académique, du fait de la profondeur limitée de cette région.

Le problème dans la photosphère consiste justement à estimer le filtrage sur une hauteur limitée. En effet, dans la chromosphère le temps de relaxation radiative augmente très rapidement, et l'atmosphère devient alors un filtre atténuateur de bande, les basses fréquences étant progressives sous forme d'ondes de gravité. Pour ces modes de basse fréquence, le flux d'énergie est proportionnel à la densité d'énergie cinétique dans la région où ils sont progressifs, et non à cette densité au niveau de la source. Considérons donc la variation de la densité d'énergie cinétique avec la distance à la source ($z = 0$) dans le modèle d'atmosphère à temps de relaxation nul. On a alors :

$$(161) \quad \langle \rho V_z^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_0^{\infty} dk\, k F_{v0}(k, \omega)\, e^{-2\lambda z}.$$

où d'après (151)

$$(162) \quad \begin{cases} \lambda = \left(k^2 - \dfrac{\gamma\omega^2}{c^2} - \dfrac{1}{4H^2}\right)^{1/2} & \text{si} \quad \dfrac{\gamma\omega^2}{c^2} - \dfrac{1}{4H^2} < k^2, \\ \lambda = 0 & \text{si} \quad \dfrac{\gamma\omega^2}{c^2} - \dfrac{1}{4H^2} > k^2, \end{cases}$$

et où $F_{v0}(k, \omega)$ est la densité spectrale de $\sqrt{\rho}\, V_z$ en $z = 0$.

Le spectre de puissance de $\sqrt{\rho}\, V_z$

$$(163) \qquad P_z(\omega) = \int dk\, k F_0(k, \omega)\, e^{-2\lambda z},$$

est la densité par intervalle de fréquence de la densité d'énergie. Le filtrage peut être caractérisé par la réduction du spectre de puissance entre $z = 0$ et le niveau z :

$$(164) \qquad \mathcal{R}_z(\omega) = P_{vz}(\omega)/P_{v0}(\omega).$$

En représentant une source constituée d'éléments turbulents de dimension horizontale L par la densité spectrale

$$(165) \qquad F_{v0}(k, \omega) = H(\omega) \exp -\frac{k^2 L^2}{2},$$

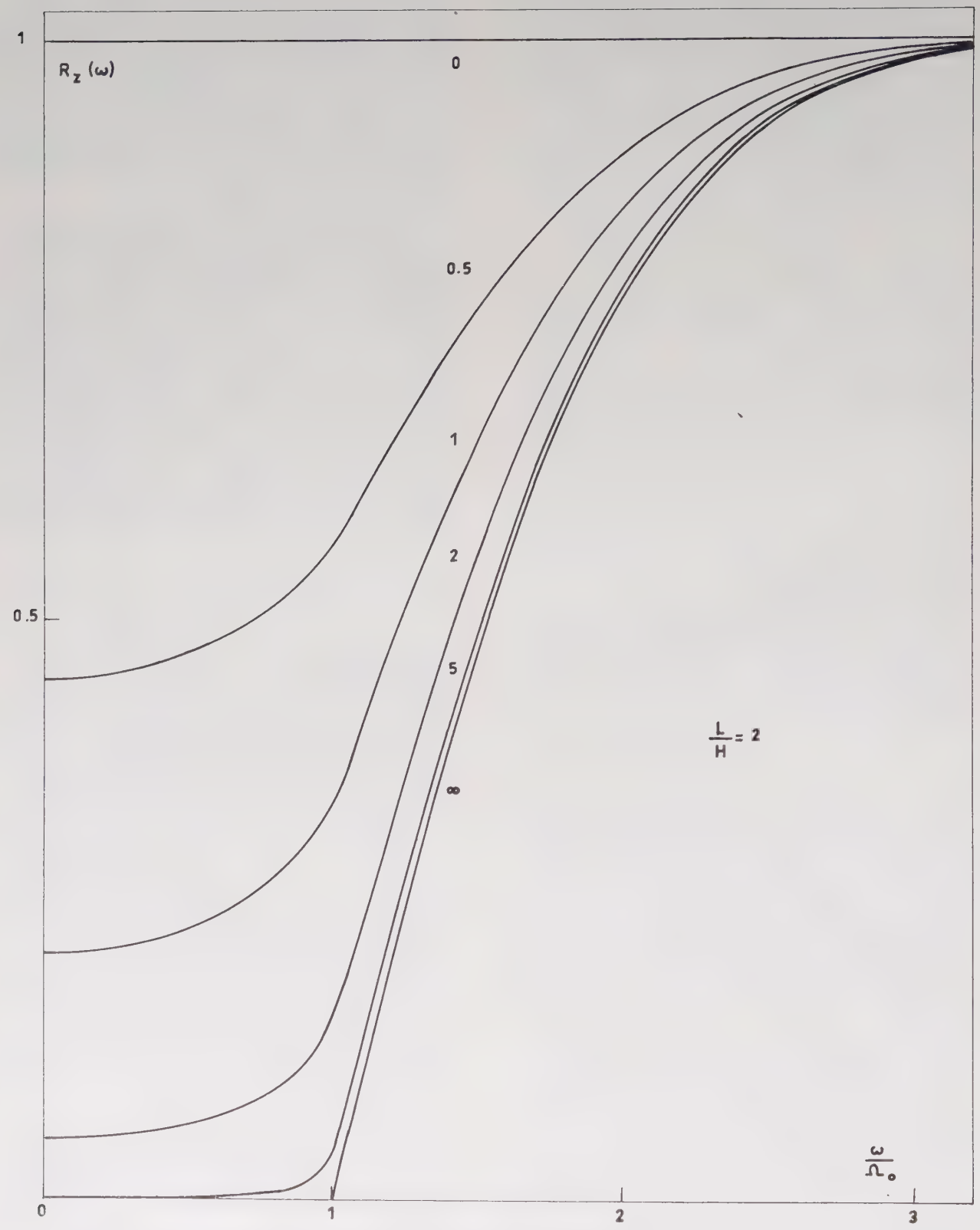

FIG. 11. — Atténuation du spectre de puissance pour une « source » de dimension caractéristique $L = 2H$. Les courbes sont indexées par la distance z/H.

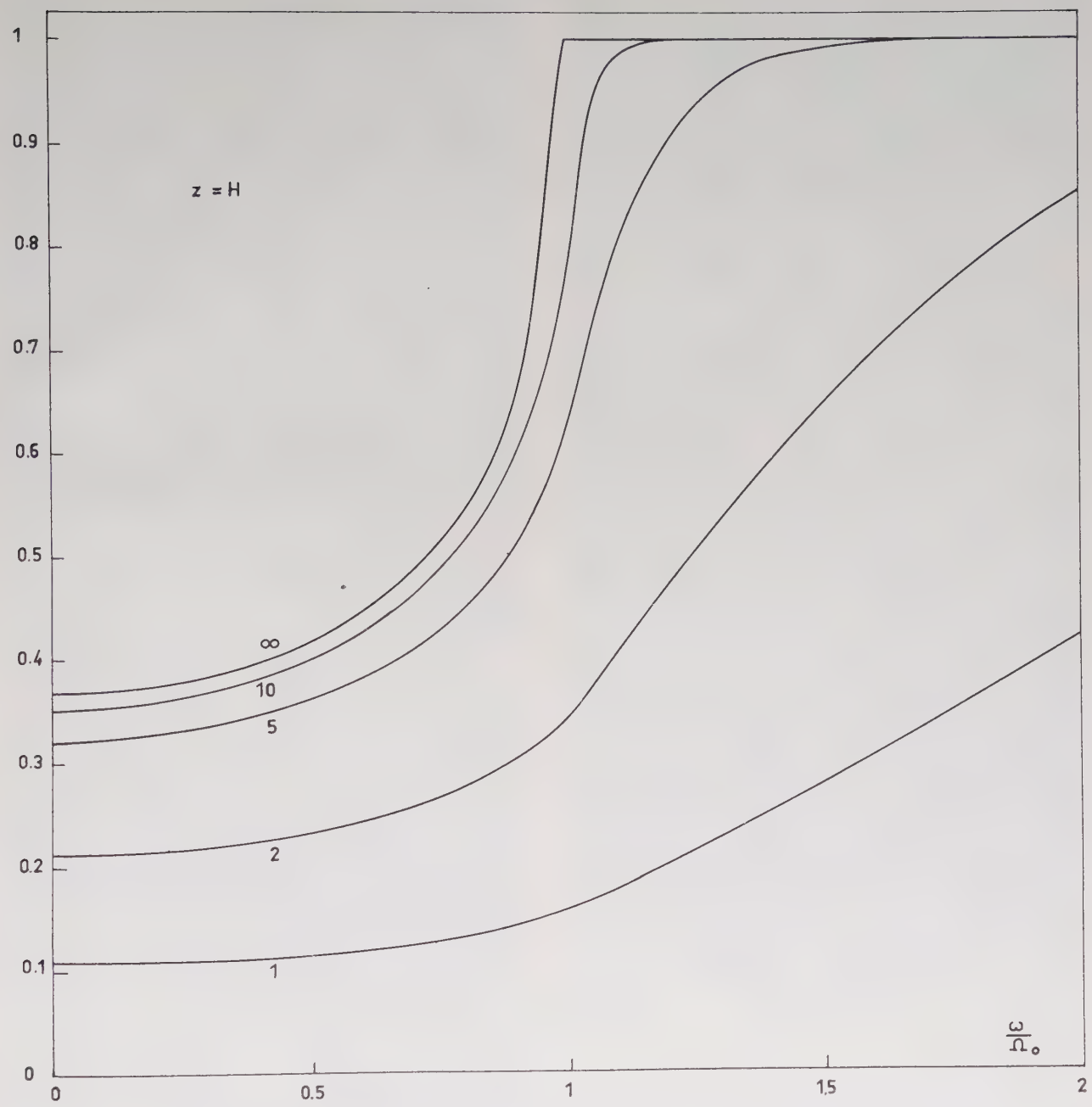

FIG. 12. — Atténuation du spectre de puissance à la distance $z = H$.
Les courbes sont indexées par la dimension relative L/H des éléments turbulents de la source.

on obtient en substituant dans (163) et (164)

$$(166)\quad \mathcal{R}_z(\omega) = \int_0^\infty dk\, k \exp - \left(\frac{k^2 L^2}{2} + 2\lambda z\right) \Big/ \int_0^\infty dk\, k \exp - \frac{k^2 L^2}{2},$$

où λ est défini par (162). L'intégrale du numérateur s'obtient immédiatement en utilisant la relation :

$$\int_\alpha^\infty dx\, e^{-x-\beta\sqrt{x}} = e^{-\alpha-\beta\sqrt{\alpha}} - \beta e^{-\frac{\beta^2}{4}} \operatorname{Erfc}\left(\sqrt{\alpha} + \frac{\beta}{2}\right),$$

où

$$\operatorname{Erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-t^2} dt,$$

est la fonction erreur complémentaire. On obtient :

$$(167)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}_z(\omega) = \exp -\left(\dfrac{z}{H}\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{\Omega_0^2}}\right) \\ \qquad \left\{ 1 - \dfrac{z}{z + \dfrac{L^2}{4H}\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{\Omega_0^2}}} \right. \\ \qquad\qquad \left. \times \left(\dfrac{z}{L} + \dfrac{L}{4H}\sqrt{1-\dfrac{\omega^2}{\Omega_0^2}} \right) \right\} \\ \text{si} \quad \omega \leqslant \Omega_0, \end{array} \right.$$

et :

$$(168)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{R}z(\omega) = 1 - \exp - \left\{ \dfrac{L^2}{8H^2}\left(\dfrac{\omega^2}{\Omega_0^2} - 1\right) \cdot \right. \\ \qquad\qquad \left. \cdot \mathrm{X}(z/L) \right\} \\ \text{si} \quad \omega \geqslant \Omega_0, \end{array} \right.$$

où :

$$(169)\quad \mathrm{X}(x) = 2\sqrt{2}\, x\, e^{2x^2}\, \mathrm{Erfc}\,(\sqrt{2}\, x).$$

Les relations (167) et (168) sont illustrées par les figures 11 et 12. Il est important de remarquer que ces relations sont également valables si L est une fonction de ω. La forme (165) décrit donc une source dont la structure spatiale est gaussienne pour chaque composante monochromatique, la largeur de cette gaussienne pouvant dépendre de la fréquence. La forme (165) n'en demeure pas moins une représentation très arbitraire de la densité spectrale du champ de vitesse verticale. Plus précisément, elle ne peut pas représenter rigoureusement un champ de vitesse verticale compatible avec les hypothèses faites sur la structure de l'atmosphère, car $F_{v_0}(k, \omega)$ doit être nulle pour $k^2 = \gamma\omega^2/c^2$.

En effet pour les modes évanescents (153) s'écrit :

$$i\omega\sqrt{\rho}\, \mathrm{V}z = \left(\lambda - \frac{1}{2H}\right) \pi/\sqrt{\rho},$$

et d'après (151),

$$\lambda = \frac{1}{2H} \quad \text{pour} \quad k^2 = \gamma\omega^2/c^2.$$

Cette inexactitude *a priori* de (165) n'est cependant pas de nature à introduire dans les résultats une erreur comparable à celles résultant de la simplification du modèle ou surtout de l'ignorance quasi-totale dans laquelle nous nous trouvons de la forme exacte de $F_{v_0}(k, \omega)$. Nous ne proposerons donc pas d'autres justifications de la forme (165) que la prédilection des théoriciens pour les fonctions d'autocorrélations gaussiennes en l'absence de raisons impérieuses d'adopter une autre forme. On peut remarquer que le spectre gaussien est particulièrement faible aux grands nombres d'ondes, et que les grands nombres d'ondes correspondent justement aux modes les plus rapidement atténués. L'ordre de grandeur de la réduction $R_z(\omega)$ du spectre de puissance décrite par (167) et (168) est donc inférieur à celui qui correspondrait à un spectre de même largeur (à chaque fréquence) mais décroissant comme une puissance de k aux grands nombres d'onde.

Cet argument renforce la validité de la conclusion que nous pouvons dégager du modèle ci-dessus.

Le filtrage des basses fréquences dans la photosphère solaire.

Il apparaît clairement que quelques échelles de hauteur suffisent à diminuer notablement l'amplitude du spectre de puissance aux basses fréquences. Quantitativement cet effet dépend de la dimension L des éléments de la source. Le tableau suivant donne la variation du spectre de puissance à l'origine ($\omega = 0$) d'après les relations (167) et (168).

Edmonds, Michard et Servajean [10] ob-

$\mathcal{R}_z(0)$

$\frac{z}{H}$	$\frac{L}{H}$ = 1	2	5	10	∞
0.	1.	1.	1.	1.	1.
0.5	0.294	0.450	0.566	0.595	0.606
1.	0.107	0.213	0.322	0.354	0.368
2	0.203×10^{-1}	0.529×10^{-1}	0.105	0.126	0.135
3.	$0.483\ 10^{-2}$	0.144×10^{-1}	0.347×10^{-1}	0.446×10^{-1}	0.498×10^{-1}
4.	0.131×10^{-2}	0.420×10^{-2}	0.115×10^{-1}	0.159×10^{-1}	0.183×10^{-1}
5.	0.378×10^{-3}	0.127×10^{-2}	0.387×10^{-2}	0.564×10^{-2}	0.674×10^{-2}

tiennent, pour la raie photosphérique la plus basse analysée CI 5052, 2, une fonction d'autocorrélation des vitesses verticales de demi-largeur de l'ordre de 550 km, soit avec $H \gtrsim 100$ km, $L/H \lesssim 5{,}5$ (nous prenons pour demi-largeur, par analogie avec la gaussienne, l'abscisse du point où la fonction normalisée à l'origine vaut 0,6). Les mêmes auteurs trouvent, ainsi que Leighton [18], une sensible augmentation de cette demi-largeur avec l'altitude, ce qui s'explique bien par le fait que le filtrage affecte plus sévèrement les modes de plus grand nombre d'onde. D'autre part d'après De Jager et Kuperus [13] la région de la zone convective très instable que nous considérons comme source *physique* du mouvement dans les couches stables est d'épaisseur inférieure à 100 km ; il est peu probable que la dimension horizontale des éléments turbulents dans cette zone soit très supérieure à son épaisseur. Il semble donc raisonnable d'adopter pour le modèle

$$L/H \lesssim 5.$$

La table de $R_z(0)$ ci-dessus montre que dans ces conditions *la densité d'énergie cinétique aux basses fréquences est divisée au moins par un facteur* 3 *par l échelle de hauteur.*

Ce résultat explique de façon satisfaisante les différences entre les spectres de puissance aux basses fréquences obtenus par Edmonds, Michard et Evans pour les raies photosphériques CI 5052,2, Ca 5051,9 et Fe 5049,8.

Sur l'ensemble de la zone photosphérique passe-haut, on est conduit à une diminution de la densité d'énergie cinétique par au moins un facteur $3{,}5 \cdot 10^{-2}$ ce qui apparaît comme une sérieuse limitation du flux d'énergie mécanique des modes de gravité dans les régions chromosphériques où ces modes existent. Notons que *cette réduction est due* en dernière analyse *à la dissipation radiative et non à la seule stratification* de l'atmosphère. En effet, en l'absence de dissipation, le gradient de densité ne s'oppose qu'à la propagation des ondes horizontales ($k = 0$) de basse fréquence. A moins d'une singularité de la densité spectrale pour $k = 0$ (par exemple : une excitation limitée aux modes verticaux) le *filtrage sans dissipation n'affecte pas le spectre de puissance pour* $\omega \ll \Omega_0$. C'est la dissipation qui élimine les modes progressifs de basses fréquences quelque soit k, ce qui conduit à l'effet décrit.

Le problème de la pseudo-périodicité du champ des vitesses verticales.

L'efficacité du filtrage des basses fréquences montre que le caractère pseudo-périodique de l'image à l'infini se manifeste rapidement. Il en résulte une possibilité d'expliquer le maximum du spectre de puissance des vitesses observé entièrement en terme de filtrage. Nous avons calculé la variation du spectre de puissance avec l'altitude dans une atmosphère passe-haut, la source étant définie par la fonction d'autocorrélation

$$\Phi_{V_0}(r,\tau) \propto \exp -\left(\frac{\tau}{\tilde{\theta}} + \frac{r^2}{2L^2}\right).$$

La figure 13 illustre les résultats obtenus pour $H/L = 0.15$ et $(\Omega_0\,\theta)^2 = 40$. Bien que les spectres ainsi obtenus suggèrent fortement les spectres déduits des observations par Edmonds, Michard et Servajean [10], cette interprétation (Souffrin [34]) se heurte à une difficulté importante : le spectre de puissance du champ de vitesse Doppler de la raie photosphérique CI 5052 présente un maximum secondaire prononcé. Or cette raie se forme, d'après les mêmes auteurs, pratiquement au niveau de la transition entre la zone stable et la zone convective sous-jacente. La validité de la théorie du filtrage *linéaire* que nous avons développée est limitée à l'atmosphère stable, ce qui ne permet pas d'interpréter rigoureusement dans ce cadre le mouvement observé à la base de cette atmosphère comme résultant du filtrage du mouvement d'une source plus profonde. Rappelons cependant que la source *physique* du mouvement atmosphérique est la région efficace dans le processus de génération de Lighthill située, selon De Jager et Kuperus [13], à environ 300 km au-dessous du niveau de transition. Il est remarquable que si cette zone instable de 300 km d'épaisseur interposée entre la zone de génération et la zone stable se comporte comme un filtre passe-haut, c'est-à-dire si il est légitime d'extrapoler

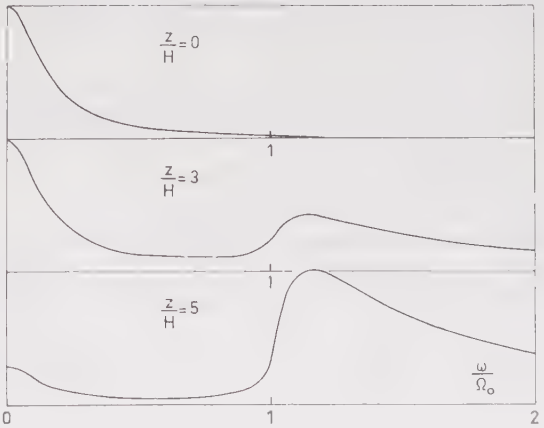

Fig. 13. — Variation du spectre de puissance du modèle défini dans le texte avec l'altitude. La normalisation de chaque courbe est arbitraire.

dans la zone instable cette propriété de la photosphère, le caractère pseudo périodique du mouvement recevait de cette façon une interprétation ne faisant intervenir ni résonance de l'atmosphère ni caractère oscillatoire de la zone convective. A défaut d'une théorie rigoureuse du mouvement dans un fluide thermiquement instable, un argument quantitatif peut être avancé à l'appui de cette suggestion.

Dans une atmosphère, stable ou instable, les mouvements sont déterminés par la compressibilité et par la force d'Archimède. Il en résulte dans le cas stable des ondes acoustiques et des ondes de gravité. Dans le cas instable, la compressibilité engendre encore des modes progressifs, mais la force d'Archimède n'étant plus une force de rappel les modes de gravité dégènèrent en modes convectifs non progressifs (Spiegel [37]). Il semble raisonnable d'associer aux modes progressifs instables une fréquence de coupure réelle due à la stratification, de la même façon que dans une région stable. La région instable intermédiaire serait alors excitée dans deux types de modes, les modes convectifs à spectre de fréquence étendu à toutes les fréquences, et les modes acoustiques instables dont le spectre serait caractérisé par une fréquence de coupure inférieure. Les modes convectifs calculés par une théorie linéarisée étant d'amplitude rapidement décroissante dans les couches supérieures de la zone convective (Böhm [7]) auraient alors un rôle analogue à celui des modes évanescents dans la photosphère stable.

Cette possibilité d'extension des propriétés de la photosphère stable aux couches sub-photosphériques est présentée plutôt comme un programme de recherche que comme explication des observations.

On peut conclure ce chapitre en remarquant que l'étude du mouvement de l'atmosphère solaire pose deux types de problèmes dans l'optique de notre analyse :

1° Expliquer le champ de vitesse photosphérique à partir du mouvement *observé à la base* de la photosphère stable.

2° Expliquer les aspects qualitatifs du mouvement observé au niveau le plus profond, en particulier le maximum secondaire entre 250 et 400 s.

On peut considérer que le premier problème reçoit une réponse satisfaisante dans le cadre du modèle de basse photosphère filtre passe-haut que nous avons proposé. On a rendu compte ainsi de l'atténuation des basses fréquences sans se limiter arbitrairement aux modes horizontaux $k = 0$.

Le déplacement du maximum du spectre de puissance vers les hautes fréquences quand l'altitude augmente s'explique dans ce modèle par la variation du facteur de réduction $R_z(\omega)$ au voisinage de la fréquence de coupure (fig. 11, 12 et 13).

Le même modèle explique qualitativement l'augmentation des dimensions caractéristiques de la granulation avec l'altitude. En effet, bien que le mouvement reste profondément différent du mouvement à l'infini, nous avons vu que le filtrage photosphérique est notable, et d'après (162) il entraîne un affaiblissement relatif des modes de plus grand nombre d'onde, d'où l'élargissement de la fonction d'autocorrélation spatiale.

Un traitement *quantitatif* nécessite la connaissance des *densités spectrales* $F_z(k, \omega)$ réelles et non simplement des spectres de puissance (P. Mein [23]) ainsi qu'une représentation explicite de la dissipation. Les relations (126), (129) permettent en principe un tel traitement dans la mesure où on peut négliger la variation du temps de relaxation avec l'altitude. Il ne semble pas que dans les conditions de l'atmosphère solaire l'introduction *explicite* du temps de relaxation soit de nature à modifier qualitativement les résultats que nous avons obtenus.

Conclusions

Ce travail constitue une contribution à l'étude du mouvement engendré dans un fluide stable par une région turbulente étendue. Nous avons représenté ce problème par celui de l'étude de l'état de mouvement dans un fluide compressible d'extension semi-infinie en présence de conditions aux limites aléatoires stationnaires, homogènes et isotropes sur le plan délimitant le fluide.

Dans une étude détaillée du fluide homogène non dissipatif nous avons mis en évidence l'effet du filtrage des fréquences spatiales de la structure du mouvement dans la région turbulente sur le mouvement à l'extérieur de cette région. Nous avons vu que ce filtrage pouvait entraîner une augmentation des dimensions caractéristiques du mouvement avec la distance à la zone turbulente, ainsi que l'existence d'un caractère pseudo-périodique (dans le temps) du champ de vitesse en l'absence de toute pseudo-périodicité du champ de vitesse dans la région turbulente.

L'introduction explicite de la dissipation radiative suivant la loi de Newton nous a permis de généraliser le diagramme diagnostique d'une atmosphère isotherme. Nous avons ainsi obtenu une condition d'existence des ondes de gravité dans une telle atmosphère. L'examen de cette condition dans la photosphère solaire montre que l'abaissement du

temps de relaxation des températures y est suffisant pour s'opposer à la propagation de modes de basses fréquences et limite notablement l'importance des ondes de gravité dans la chromosphère.

Tous les modèles étudiés ici sont caractérisés par des surfaces des indices indépendantes de la position, ce qui correspond à l'absence de réfraction et de réflexion d'ondes. L'extension de ce travail à des modèles tenant compte de ces effets permettrait de préciser un modèle théorique de la dynamique de l'atmosphère solaire qui n'a été ici qu'esquissé.

Appendice

Les expressions (49) et (67) des fonctions d'autocorrélation font intervenir des intégrales de fonctions de Bessel, plus précisément des transformations de Hankel finies d'ordre 0,1 et 2.

De telles intégrales interviennent également en optique, dans le calcul de l'éclairement derrière une pupille de transparence non uniforme (Lansreaux, cf. [20]). Nous donnons ici des développements permettant le calcul de ces intégrales.

Nous calculerons d'abord :

$$\mathrm{I} = \int_0^k du\, u \mathrm{J}_0(xu)\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2 \mathrm{L}^2}{2}}.$$

On part de l'intégrale de Sonine (Petiaud [26])

$$(-1)^{n-1} \int_0^1 du\, \mathrm{J}_0(ux)\, u(u^2-1)^{n-1} = 2^{n-1}(n-1)!\, \frac{\mathrm{J}_n(x)}{x^n},$$

où J_n est la fonction de Bessel d'ordre n.

On peut l'écrire :

$$(-1)^{n-1} \int_0^k du\, u\, \mathrm{J}_0 x) \frac{(u^2-k^2)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} = \frac{k^n}{x^n} \mathrm{J}_n(kx)$$

En sommant de n égal un à l'infini, et en permutant l'ordre des sommations, on obtient :

$$\int_0^k du\, u\, \mathrm{J}_0(ux)\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}} \sum_1^\infty \frac{k^n \mathrm{J}_n(kx)}{x^n},$$

soit

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{k^2 \mathrm{L}^2}{2}}}{\mathrm{L}^2} \sum_1^\infty \left(\frac{k\mathrm{L}^2}{x}\right)^n \mathrm{J}_n(kx).$$

Cette relation est contenue dans un résultat plus général obtenu par Lansreaux (cf. [20]) d'une façon moins directe.

La série

$$\mathrm{S} = \sum_1^\infty \left(\frac{k\mathrm{L}^2}{x}\right)^n \mathrm{J}_n(kx),$$

est une série de von Neuman. Son développement en série de puissance s'écrit :

$$\mathrm{S} = \sum_{l=0}^\infty \frac{1}{(l+1)!} \left(\frac{k^2 \mathrm{L}^2}{2}\right)^{l+1} \sum_{s=0}^l (-1)^s \left(\frac{x^2}{2\mathrm{L}^2}\right)^s \frac{1}{s!},$$

en écrivant :

$$\sum_0^l = \sum_0^\infty - \sum_{l+1}^\infty,$$

il vient :

$$\mathrm{S} = \left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{L}^2 k^2}{2}} - 1\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\mathrm{L}^2}} - \mathcal{R},$$

où nous avons posé :

$$\mathcal{R} = \sum_{l=0}^\infty \left(\frac{k^2 \mathrm{L}^2}{2}\right)^{l+1} \frac{1}{(l+1)!} \sum_{s=l+1}^\infty (-1)^s \left(\frac{x^2}{2\mathrm{L}^2}\right)^s \frac{1}{s!}.$$

On peut écrire :

$$\mathcal{R} = \sum_{l=1}^\infty \left(\frac{\mathrm{L}^2 k^2}{2}\right)^l \frac{1}{l!} \sum_{n=0}^\infty (-1)^{l+n} \left(\frac{x^2}{2\mathrm{L}^2}\right)^{l+n} \frac{1}{(l+n)!}.$$

En permutant les sommations, et en utilisant le développement

$$\frac{\mathrm{J}_n(x)}{x^n} = 2^{-n} \sum_0^\infty (-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \frac{1}{(n+p)!} \frac{1}{p!}$$

des fonctions de Bessel, on obtient :

$$\mathcal{R} = \sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{x}{k\mathrm{L}^2}\right)^n \mathrm{J}_n(kx) - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\mathrm{L}^2}},$$

soit en portant cette expression dans S :

$$\mathrm{S} = \mathrm{e}^{\left(\frac{k^2 \mathrm{L}^2}{2} - \frac{x^2}{2\mathrm{L}^2}\right)} - \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{\mathrm{L}^{2n}} \left(\frac{x}{k}\right)^n \mathrm{J}_n(kx),$$

soit enfin :

(A2)

$$\mathrm{I} = \frac{1}{\mathrm{L}^2} \left\{ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\mathrm{L}^2}} - \mathrm{e}^{-\frac{k^2 \mathrm{L}^2}{2}} \sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{x}{k\mathrm{L}^2}\right)^n \mathrm{J}_n(kx) \right\}.$$

Pour $k \to \infty$ on retrouve le résultat classique :

$$\text{(A3)} \quad \int_0^\infty du\, u J_0(ux)\, e^{-\frac{u^2 L^2}{2}} = \frac{1}{L^2} e^{-\frac{x^2}{2L^2}},$$

ce qui permet d'écrire (A2) sous la forme :

$$\text{(A4)} \quad \int_k^\infty du\, u J_0(ux)\, e^{-\frac{u^2 L^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{k^2 L^2}{2}}}{L^2} - \sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{x}{kL^2}\right)^n J_n(kx).$$

En dérivant (A1), (A3) et (A4) par rapport à L^2 on obtient les relations :

$$\text{(A5)} \quad \int_0^\infty du\, u^3 J_0(ux)\, e^{-\frac{u^2 L^2}{2}} = \frac{2}{L^4}\left(1 - \frac{x^2}{2L^2}\right) e^{-\frac{x^2}{2L^2}},$$

$$\text{(A6)} \quad \int_0^k du\, u J_0(ux)\left(1 - \frac{u^2}{k^2}\right) e^{-\frac{u^2 L^2}{2}} = \frac{2}{L^2} e^{-\frac{k^2 L^2}{2}} \sum_1^\infty n (kL)^{2n} \frac{J_{n+1}(kx)}{(kx)^{n+1}},$$

$$\text{(A7)} \quad \int_k^\infty du\, u J_0(ux)\left(1 - \frac{u^2}{k^2}\right) e^{-\frac{u^2 L^2}{2}} = -\frac{2}{L^2} e^{-\frac{k^2 L^2}{2}} \sum_0^\infty (-1)^n (n+1)(kx)^n \frac{J_n(kx)}{(kL)^{2n+2}}.$$

En dérivant (A3), (A1) et (A4) par rapport à x, et en utilisant les formules de récurrence (cf. Petiaud [26]) :

$$\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{J_n(z)}{z^n}\right) = -\frac{J_{n+1}(z)}{z^n},$$

on obtient :

$$\text{(A8)} \quad \int_0^\infty du\, u^2 \frac{J_1(ux)}{x} e^{-\frac{u^2 L^2}{2}} = \frac{1}{L^4} e^{-\frac{x^2}{2L^2}},$$

$$\text{(A9)} \quad \int_0^k du\, u^2 \frac{J_1(ux)}{x} e^{-\frac{u^2 L^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{k^2 L^2}{2}}}{L^4} \sum_1^\infty (k^2 L^2)^{n+1} \frac{J_{n+1}(kx)}{(kx)^{n+1}},$$

$$\text{(A10)} \quad \int_k^\infty du\, u^2 \frac{J_1(ux)}{x} e^{-\frac{u^2 L^2}{2}} = \frac{e^{-\frac{k^2 L^2}{2}}}{L^4}\left\{k^2 L^2 \frac{J_1(kx)}{kx} + \sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{x}{kL^2}\right)^n J_n(kx)\right\}.$$

Ces expressions permettent d'expliciter les relations (67) par des développements en puissance de $(k_c L)^{-1}$ et de $k_c L$, c'est-à-dire de calculer le mouvement induit par une source constituée de pistons de dimension finie. On obtient, par exemple, pour la première équation (67) les développements :

$$\begin{cases} \Phi_{\pi\infty}(r, 0) = \dfrac{2\pi}{L^2} e^{-\frac{k_c^2 L^2}{2}} \displaystyle\sum_1^\infty (k_c L)^{2n} \frac{J_n(k_c r)}{(k_c r)^n}, \\ \Phi_{\pi\infty}(r, 0) = \dfrac{2\pi}{L^2}\left\{ e^{-\frac{r^2}{2L^2}} - e^{-\frac{k_c^2 L^2}{2}} \displaystyle\sum_0^\infty (-1)^n \left(\frac{r}{k_c L^2}\right)^n J_n(k_c r)\right\}. \end{cases}$$

Ces développements (fig. 3) et ceux analogues correspondant aux autres fonctions d'autocorrélation, permettent d'estimer le domaine de validité des approximations des « petits éléments » ou des « grands éléments » utilisées dans le texte.

Remerciements

Mes remerciements vont à M. Lallemand, Directeur de l'Institut d'Astrophysique ; à M. le professeur Schatzman, mon directeur de recherches, dont les encouragements constants m'ont été d'une aide précieuse ; à M. Cayrel qui a bien voulu être mon parrain de recherches. Je suis heureux de pouvoir remercier également M. Mein pour de nombreuses discussions stimulantes, ainsi que tous mes collègues et le personnel de l'Institut d'Astrophysique qui ont créé les conditions morales et matérielles sans lesquelles ce travail n'aurait été réalisé.

Manuscrit reçu le 27 *janvier* 1966.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bahng J. et Schwarzschild M., 1963, *Ap. J.*, **137**, 901.
[2] Balescu R., 1963, Statistical properties of charged particles, Interscience Publ.
[3] Batchelor G. K., 1959, The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press.
[4] Bénard, 1900, *Revue générale des Sciences*, **12**, 1261.
[5] Bjerknes V., Bjerknes J., Solberg H. et Berjeron T., 1933, Physikalishe Hydrodynamik, Springer, Berlin.
[6] Blackman R. B. et Tuckey J. W., 1958, The measurement of power spectra, Dover Public., New-York.
[7] Böhm K. H., 1963, *Ap. J.*, **137**, 881.

[8] Eckart C., 1960, Hydrodynamics of oceans and atmospheres, Pergamon Press.
[9] Edmonds Jr. F. N., 1956, *Ap. J.*, **125**, 535.
[10] Edmonds Jr., F. N., Michard R., et Servajean R., 1965, *Ann. Astr.*, **28**, 534.
[11] Evans J. W,, Michard R., Servajean R., 1963, *Ann. Astr.*, **26**, 368.
[12] Heintze J. R. W., Hubenet H., de Jager C., 1964, Proceedings of the first Harvard Smithsonian conference on stellar Atmospheres, 239.
[13] De Jager C. et Kuperus M., 1961, *B. A. N.*, **16**, 71.
[14] Jansen J., 1896, *Ann. Obs. Paris, Meudon*, **1**.
[15] Kato S., On the atmospheric oscillations exited by turbulence. Polycopié Goddard Institute for Space Studies. N. A. S. A.
[16] Lamb H., 1909, *Proc. London Math. Soc.*, **7**, 122.
[17] Lamb H., 1932, Hydrodynamics, Cambridge, Univ. Press.
[18] Leighton R. B., 1963, *Annual review of Ast. and Ap.*, **1**, 13.
[19] Lighthill M. J., 1952, *Proc. Roy. Soc. London, A* **211**, 564.
[20] Maréchal A. et Françon M., 1960, Diffraction, Structure des images, Édition *Revue d'Optique*, Paris.
[21] Markham J. J., Beyer R. T., Lindsay R. B., 1951, *Rev. Pod. Phys.*, **23**, 353.
[22] Mein P., 1964, *Comptes rendus*, **258**, 453 et 819.
[23] Mein P., 1965, *Comptes rendus*, **260**, 1867 et 1966, *Ann. Astr.* (à paraître).
[24] Moore D. W. et Spiegel E. A., 1964, *Ap. J.*, **139**, 48.
[25] Noyes R. W. et Leighton R. B., 1963, *Ap. J.*, **136**, 631.
[26] Petiaud G., 1955, La théorie des fonctions de Bessel, C. N. R. S. Paris.
[27] Rayleigh, 1916, *Phil. Mag.*, **32**, 529.
[28] Richardson R. S. et Schwarzschild M., 1950, *Ap. J.*, **111**, 351.
[29] Rösch J., 1959, *Ann. Astr.*, **22**, 584.
[30] Schatzman E., 1953, *Bull. de l'Ac. Roy. de Belgique*, 5° série. **39**, 960.
[31] Schatzman E., 1964, *Astrophysica Norwegica*, **9**, 283 et 1965, Oscillatory and wave motion in stellar atmospheres (à paraître).
[32] Skumanick, A., 1955, *Ap. J.*, **121**, 404.
[33] Souffrin P., 1964, *Comptes rendus*, **259**, 2355.
[34] Souffrin P., 1965, *Comptes rendus*, **260**, 2135.
[35] Spiegel E. A., 1957, *Ap. J.*, 202.
[36] Spiegel E. A., 1963, *Ap. J.*, **138**, 216.
[37] Spiegel E. A., 1964, *Ap. J.*, **139**, 959.
[38] Spiegel E. A., 1965, *Ap. J.*, **141**, 1068.
[39] Stokes G. G., 1851, *Phil. Mag.*, **1**, 305.
[40] Taylor G. I., 1929, *Proc. Roy. Soc.*, **126**, 169.
[41] Thomson J., 1881, *Proc. Glasgow Phil. Soc.*, **2**.
[42] Tolstoy I., 1963, *Rev. Mod. Phys.*, **35**, 207.
[43] Uchida Y., 1965, *Ap. J.*, **142**, 335.
[44] Unsöld A., 1938, Physik der Sternatmosphären, Springer, Berlin.
[45] Veronis G., 1963, *Ap. J.*, **137**, 641.
[46] Whitaker W. A., 1963, *Ap. J.*, **137**, 914.
[47] Whitney C. A., 1958, *Smithsonian Contr. Ap.*, **2**, 365.
[48] Wiener N., 1960, Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, Techn. Press of the M. I. T.

Imprimerie Taffin-Lefort, à Lille (France). — *Published in France.*

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Le spectre des Naines Blanches

VU ET APPROUVÉ :
Paris, le 10 Février 1966
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
Marc ZAMANSKY

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean ROCHE